MATHEMATIQUES
Les suites : entraînement (corrigé)

Exercice 1

1. • Au 1er juin 2018 , il y a 3000 abonnés.
• Entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 clients s'abonnent. Il y a donc 3080 abonnés au 31 octobre.

• Entre le 1er novembre et le 31 mai, le nombre d'abonnés baisse de 5 %.
5 % de 3080 $= 0,05 \times 3080 = 154$.
La perte est donc de 154 abonnés.
$3080 - 154 = 2926$.
Le nombre d'abonnés au 1er juin 2019 est 2926.

Coefficient multiplicateur

Diminuer une quantité de 5 % revient à la multiplier par $1 - 0,05 = 095$.
0,95 est le coefficient multiplicateur.
$3080 \times 0,95 = 2926$.

u_1 est le nombre d'abonnés en au 1er juin 2019, donc :

$$u_1 = 2926$$

2. • Au 1er juin $(2018 + n)$, il y a u_n abonnés.
• Entre le 1er juin et le 31 octobre, $u_n + 80$ clients s'abonnent. Il y a donc $u_n + 80$ abonnés au 31 octobre.
• Entre le 1er novembre et le 31 mai, le nombre d'abonnés baisse de 5 %.
$0,95 \times (u_n + 80) = 0,95u_n + 76$.

Le nombre d'abonnés au 1er juin de l'année suivante (soit $(2018 + (n + 1))$) est $0,95u_n + 76$.

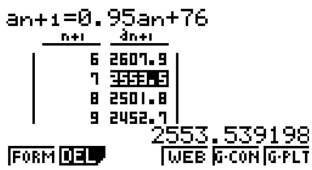
Méthode

On procède comme dans la question précédente en partant de u_n comme nombre d'abonnés.

u_{n+1} est le nombre d'abonnés en au 1er juin $(2018 + (n + 1))$, donc :

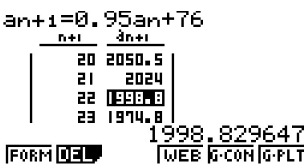
$$u_{n+1} = 0,95u_n + 76$$

3. a. Le nombre d'abonnés est en 2025 est donné par u_7.



Si ce modèle se poursuit, il y aura 2554 abonnés en 2025.

b. Avec la calculatrice on obtient :



Cela montre que les craintes de la directrice sont justifiées puisqu'à partir de $n = 22$ soit en 2040, le nombre d'abonnés passera en dessous de 2000.

Exercice 2

1. $u_8 = 5 \times 8 - 2 = 38$.

2. $v_1 = 3v_0 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$ et $v_2 = 3 \times v_1 + 1 = 3 \times 13 + 1 = 40$.

3. Expression de w_{n+1} en fonction de n.

$$\begin{array}{rcll} w_{n+1} & = & 3(n+1)^2+1 & \\ & = & 3(n^2+2n+1)+1 & \text{N'oubliez pas l'égalité remarquable!} \\ & = & 3n^2+6n+3+1 & \\ & = & 3n^2+6n+4 & \end{array}$$

4. Pour obtenir t_1, on remplace n par 0 : $t_1 = 0 + u_0 = -1$.
Pour obtenir t_2, on remplace n par 1 : $t_2 = 1 + t_1 = 1 + (-1) = 0$.
Pour obtenir t_3, on remplace n par 2 : $t_3 = 2 + t_2 = 2 + 0 = 2$.

5. En A3, on saisit $\boxed{= A2 + 1}$ et en $B3$: $\boxed{= 1,7 * B2 - 2}$.

6. On note u_0 la valeur de la voiture en 2019. On a $u_0 = 12000$.
On note u_n la valeur de la voiture en $2019 + n$.
Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n - 600$.

Exercice 3

1. • On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle OA_0A_1 rectangle en A_0 :

$$\begin{array}{rcl} OA_0^2 + A_0A_1^2 & = & OA_1^2 \\ 1^2+1^2 & = & OA_1^2 \\ 2 & = & OA_1^2 \\ OA_1^2 & = & \sqrt{2} \end{array}$$

Diagonale d'un carré

La diagonale d'un carré de côté a est $a\sqrt{2}$.
OA_1 est la diagonale d'un carré de côté 1, donc $OA_1 = \sqrt{2}$.
C'est un résultat utile à connaître en première.

On obtient :

$$d_1 = \sqrt{2}$$

• On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle OA_1A_2 rectangle en A_1 :

$$\begin{array}{rcl} OA_1^2 + A_1A_2^2 & = & OA_2^2 \\ \sqrt{2}^2+1^2 & = & OA_2^2 \\ 3 & = & OA_2^2 \\ OA_2^2 & = & \sqrt{3} \end{array}$$

On obtient :

$$d_2 = \sqrt{3}$$

2. On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle OA_nA_{n+1} rectangle en A_1 :

L'idée

On refait les mêmes calculs que dans la question précédente mais dans un cas général.

$$\begin{array}{rcl} OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2 & = & OA_{n+1}^2 \\ d_n^2+1^2 & = & OA_{n+1}^2 \\ 1+d_n^2 & = & OA_{n+1}^2 \\ OA_{n+1}^2 & = & \sqrt{1+d_n^2} \end{array}$$

On obtient :

$$d_{n+1} = \sqrt{1+d_n^2}$$

3. $d_3 = \sqrt{1+d_2^2} = \sqrt{1+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$.

Exercice 4

1. L'empilement à 3 niveaux contient $9+4+1=14$ boulets.

2. Le nombre de boulets n'est pas très important, on peut procéder à tâtons :

Pour un empilement à 4 niveaux, on a $14+16=30$ boulets.

Pour un empilement à 5 niveaux, on a $30+25=55$ boulets.

C'est donc un empilement à 5 niveaux qui contient 55 boulets.

3. Le premier niveau (le plus bas) d'un empilement à n niveaux contient n^2 boulets. Le suivant : $(n-1)^2$, ... le dernier niveau (le plus haut) contient 1^2 boulet.
Ainsi un empilement à n niveaux contient $1^2+2^2+.....+n^2$.
On a donc pour pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$S_n = 1^2+2^2+3^2+......+n^2$$

4. $S_7 = \dfrac{7(7+1)(2\times 7+1)}{6} = 140$.
Un empilement à 7 niveaux contient 140 boulets.

Cohérence

En procédant comme précédemment :
un empilement à 5 niveaux contient 55 boulets.
Pour obtenir le nombre de boulets pour un empilement à 7 niveaux, on ajoute à celui-ci 6^2+7^2, soit 85 boulets.
Comme $55+85=140$, un empilement à 7 niveaux comporte bien 140 boulets.

5. a. S_2 est le nombre de boulets dans un empilement à 2 niveaux, donc pour obtenir le nombre de boulets dans un empilement à 3 niveaux à partir du précédent, il n'y a plus qu'à ajouter à celui-ci le nombre de boulets du premier niveau (le plus bas) qui est composé de 3^2 boulets. Ainsi, on a $S_3 = S_2 + 3^2$.
Pour les mêmes raisons, $S_4 = S_3 + 4^2$ ..... etc.
L'algorithme complété est donc :

```
def boulet(n):
    S=5
    for i in range(3,n+1):
        S=S+i**2
    return S
```

ou bien en utilisant la formule donnée :

```
def boulet(n):
    S=5
    for i in range(3,n+1):
        S=(i*(i+1)*(2*i+1))/6
    return S
```

b. La commande `boulet(10)` retourne le nombre de boulets dans un empilement à 10 niveaux.
Or, $S_{10} = \dfrac{10(10+1)(2\times 10+1)}{6} = 385$.
Dans un empilement à 10 niveaux, il y a 385 boulets.

6. – Volume d'un boulet : $\dfrac{4}{3}\times\pi\times 6^3 = 288\pi$ cm^3.

– L'empilement à 3 niveaux contient 14 boulets qui ont un volume de $14\times 288\pi = 4\,032\pi$ cm^3.
1 m^3 de fonte a une masse de 7 300 kg, donc 1 dm^3 de fonte a une masse de 7,3 kg et 1 cm^3 de fonte a une masse de 0,007 3 kg, donc les 14 boulets ont une masse de :
$4\,032\pi \times 0{,}007\,3 = 29{,}433\,6\pi \approx 92,46$ kg, soit 92 kg au kilogramme près.

Exercice 5

1. • En remplaçant n par 1 dans l'égalité, on obtient : $1 \times u_1 = (1+1) \times u_0 + 1$ soit $u_1 = 2u_0 + 1 = 3$.

   • En remplaçant n par 2 dans l'égalité, on obtient : :

$$\begin{array}{rcl} 2 \times u_2 & = & (2+1) \times u_1 + 1 \\ 2u_2 & = & 3u_1 + 1 \\ 2u_2 & = & 10 \\ u_2 & = & 5 \end{array}$$

   • En remplaçant n par 3 dans l'égalité, on obtient : :

$$\begin{array}{rcl} 3 \times u_3 & = & (3+1) \times u_2 + 1 \\ 3u_3 & = & 4u_2 + 1 \\ 3u_3 & = & 21 \\ u_3 & = & 7 \end{array}$$

2. Les termes de la suites sont 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ..... On conjecture que $u_n = 2n + 1$.

3. En C2, on entre : $\boxed{= (D1 * B2 + 1)/C1}$ ou $\boxed{= ((C1 + 1) * B2 + 1)/C1}$.