MATHEMATIQUES
Probabilités - Variables aléatoires : entraînement savoir-faire

Chapitre 9 : Probabilités - Variables aléatoires	**Evaluation**
420. Interpréter et utiliser les notations $\{X = a\}$, $\{X < a\}$, $P(X = a)$, $P(X < a)$.	●● | ● | ● | ● | ●●
421. Modéliser une situation avec une variable aléatoire.	●● | ● | ● | ● | ●●
422. Calculer une espérance, une variance, un écart type.	●● | ● | ● | ● | ●●
423. Utiliser la notion d'espérance dans la résolution d'un problème.	●● | ● | ● | ● | ●●

Exercice 1 420

Un magasin propose un service de courses en ligne. Les achats sont rangés dans des sacs réutilisables dont le nombre dépend du volume que représentent les différents articles. Si le client n'achète qu'un seul article, le magasin ne donne pas de sac.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de sacs donnés par le magasin.

1. Décrire en français, en utilisant les termes « plus de », « moins de », « au moins » ou « au plus », les événements suivants :

a. $\{X = 3\}$ **b.** $\{X \leqslant 2\}$ **c.** $\{1 < X\}$ **d.** $\{X > 3\}$ **e.** $\{X \geqslant 1\}$

2. Décrire les événements suivants avec les notations mathématiques en utilisant la notation X et un ou plusieurs symboles : $\geqslant$, $>$, $\leqslant$, $<$.
a. Le magasin n'a pas donné de sac.
b. Le magasin a donné au moins 2 sacs.
c. Le magasin a donné au plus 3 sacs.
d. Le magasin a donné 4 sacs ou plus.
e. Le magasin a donné plus d'un sac mais moins de 4.

3. Le tableau suivant donne la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7 et plus
$P(X = x_i)$	0,01	0,05	0,07	0,2	0,23	0,3	0,08	0,06

a. Calculer $P(\{X \leqslant 2\})$.
b. Calculer $P(\{X > 4\})$.
c. On note A l'événement $\{X \geqslant 1\}$. Calculer $P(A)$.

Exercice 2 421

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Nabolos retire 30 € dans un distributeur de billets. Pour constituer cette somme, le distributeur utilise des billets de 5 €, 10 € et 20 €, de manière aléatoire.
On note X le nombre de billets qui sortent de l'appareil et Y le nombre de billets de 5 euro.
Quelles sont les valeurs possibles de X et Y ?
Décrire avec une phrase les événements $\{X \geqslant 2\}$ et $\{Y \geqslant 1\}$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules jaunes, 2 boules vertes et 1 boule bleue.
On tire au hasard une boule de l'urne et on note sa couleur.
On gagne 10 points lorsqu'on tire une boule bleue, 5 points pour une boule verte, 2 points pour une boule jaune et 1 point pour une boule rouge.
On note X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de points gagnés.
Déterminer la loi de probabilité de X. Résumer cette loi à l'aide d'un tableau.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,16		

Compléter ce tableau sachant que les événements $(X = 3)$ et $(X = 4)$ ont la même probabilité.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 3 422

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est définie dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,25	0,4	0,05	0,3

1. Calculer l'espérance de X, $E(X)$.

2. Calculer la variance de X (c'est-à-dire $V(X)$) et une valeur approchée à 10^{-2} de son écart type.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 4 423

Les six faces d'un dé sont colorées : trois faces sont rouges, deux sont jaunes et une est bleue.
Un joueur mise 1 €, puis lance le dé. S'il obtient une face jaune, il gagne 3 €, s'il obtient la face bleue, il gagne 5 € et s'il obtient une face rouge, il ne gagne rien.
X est la variable aléatoire égale au gain ou à la perte en tenant compte de la mise.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer et interpréter l'espérance de X.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 5 423

Un parc d'attractions propose une carte d'entrée pour la journée au prix de 30 €.
Cette carte donne accès à des attractions avec un prix unique de 2 € par attraction. Une étude statistique a permis d'obtenir le tableau suivant :

Nombres d'attractions	2	3	4	5	6
Pourcentage de clients	10	25	35	25	5

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'attractions choisies par un visiteur pris au hasard.
On note S la variable aléatoire qui donne la somme totale qu'il dépense.

1. Calculer $E(X)$.

2. Etablir la loi de probabilité de S sous la forme d'un tableau, puis calculer $E(S)$.

3. Le parc a des frais d'organisation qui s'élèvent en moyenne à 25 € par client. Avec 200 visiteurs par jour, quel bénéfice peut espérer le gérant sur un an, en ouvrant le parc 365 jours ?