Vecteours

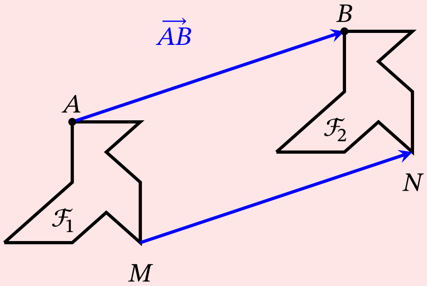
1 Translations et vecteurs associés

1.1 Translation

Définition : Translation

A et B sont deux points distincts du plan.
La **translation qui transforme** A **en** B est appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point M a pour image le point N.



Propriété : Caractéristiques d'un vecteur

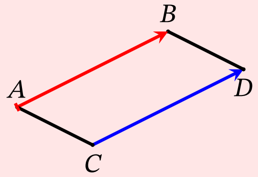
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- sa direction (celle de la droite (AB)) ;
- son sens (de A vers B) ;
- sa norme (la longueur du segment $[AB]$).

1.2 Vecteurs égaux

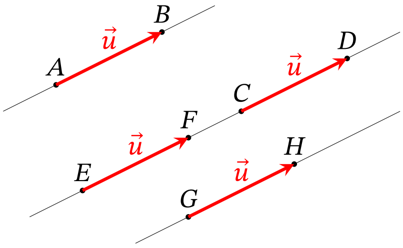
Propriété : Caractérisation du parallélogramme

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $AB\color{red}{DC}$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).



Attention à l'ordre des points dans lequel on nomme le parallélogramme : $ABDC$ et non $ABCD$.

Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$, alors on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$ sont des représentants d'un même vecteur que l'on peut noter avec une seule lettre ($\vec{u}$, $\vec{v}$ ou $\vec{w}$ ...) indépendamment des deux points.
D'où : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$.
Un vecteur admet une infinité de représentants.

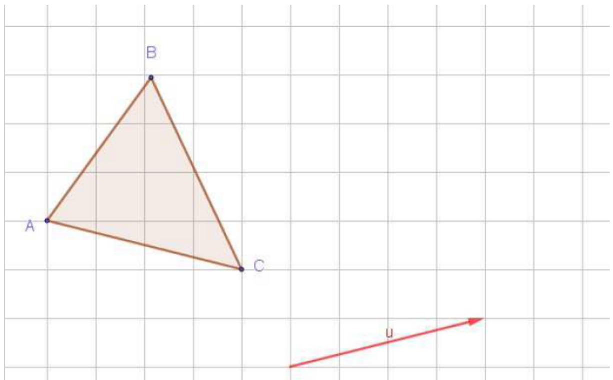


Remarque

la norme du vecteur $\vec{u}$ est notée $||\vec{u}||$. On peut écrire aussi : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

Méthode : Construire l'image d'une figure par une translation

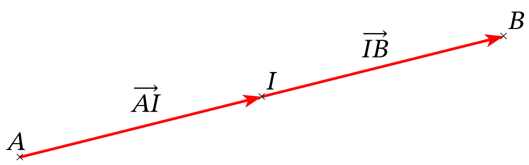
Tracer l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{u}$.



1.3 Milieu d'un segment

Propriété : caractérisation du milieu d'un segment

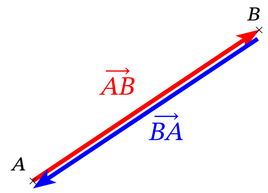
I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.



1.4 Vecteurs particuliers

• Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul. On le note $\vec{0}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

• Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

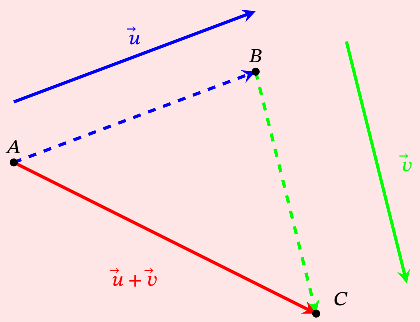


2 Somme de deux vecteurs

2.1 Définition

Définition : Vecteur somme

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u}+\vec{v}$, est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.



Méthode : Construire un point à partir d'une somme de vecteurs

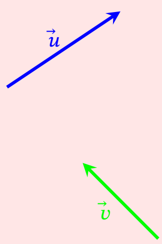
Soit ABC un triangle non aplati.
Construire le point F défini par : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

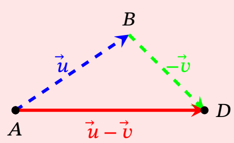
Propriété : Somme nulle de deux vecteurs et milieu

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ si et seulement si A est le milieu du segment $[BC]$.

Définition : Différence de deux vecteurs

Le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$ est défini par $\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$ ce qui signifie que soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.



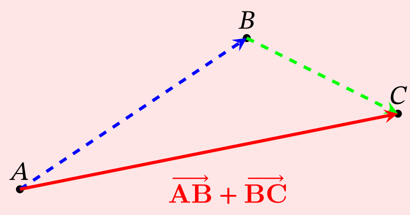


2.2 Relation de Chasles

Propriété : relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



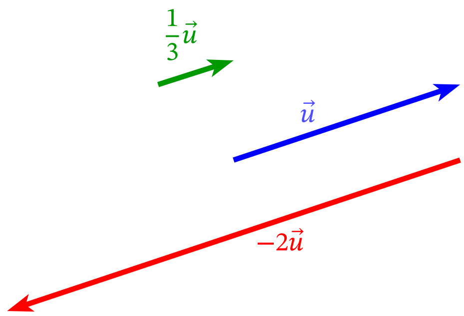
3 Produit d'un vecteur par un réel

3.1 Définition

Définition : Produit d'un vecteur par un nombre réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel non nul, alors le vecteur $k\vec{u}$ est défini par :

- **sa direction :** la même que celle de $\vec{u}$;
- **son sens :** celui de $\vec{u}$ si $k > 0$, l'opposé de $\vec{u}$ si $k < 0$;
- **sa norme :** $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$.



Méthode : Construire un point à partir d'une égalité vectorielle

Soit ABC un triangle non aplati. Construire le point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

Propriété : Distributivité entre vecteurs et réels

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous nombres réels k et k' :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$;
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$;
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.

3.2 Vecteurs colinéaires

Définition : Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie donc qu'ils ont la **même direction**.

Propriété : Parallélisme et alignement

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;
- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (par exemple) sont colinéaires.

Remarque

L'égalité $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ montre que le point M est le milieu de $[AB]$.

Méthode : Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires

On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{v}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

4 Coordonnées

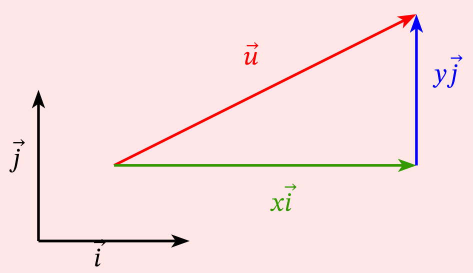
4.1 Base orthonormée et décomposition

Définition : Base orthonormée

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires dont les directions sont perpendiculaires et tels que $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1$. Le couple $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$ est appelé **base orthonormée** des vecteurs du plan.

Propriété : Décomposition d'un vecteur

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose **de manière unique** sous la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ où x et y sont des réels.
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le couple de **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$.



Exemple :

dans la base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$, si $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}=-2\vec{i}+3\vec{j}$.

4.2 Repère orthonormée

Définition : Repère orthonormée

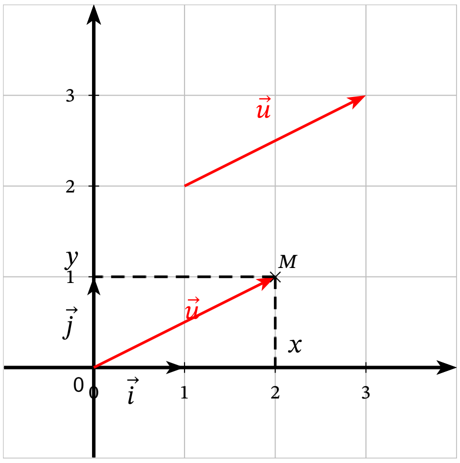
On appelle **repère orthonormé** du plan le triplet $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ constitué par un point O appelé **origine** et par les vecteurs d'une **base orthonormée** $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que :

$\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.

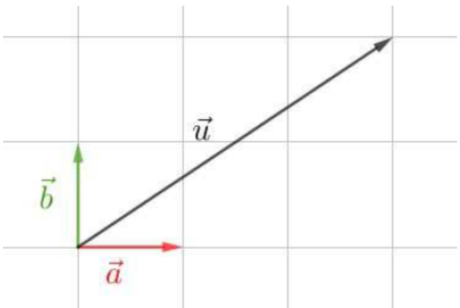
$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ donc $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $M(2\ ;\ 1)$.



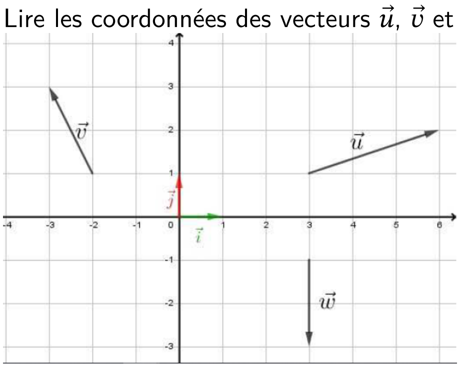
Méthode : Exprimer un vecteur en fonction de deux autres

Par lecture graphique, exprimer $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



Méthode : Lire les coordonnées d'un vecteur

Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.



4.3 Vecteurs égaux, somme de vecteurs

Propriété : Égalité, somme de vecteurs

Dans une base orthonormée $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

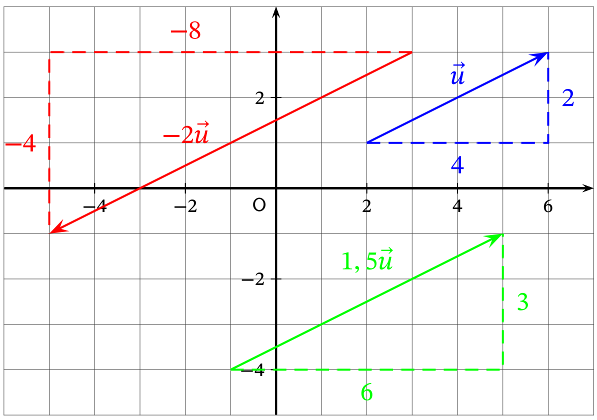
  Autrement dit, $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si :
$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

- Le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :
$$\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

4.4 Multiplication par un réel

Propriété : Multiplication par un réel

Dans une base orthonormée $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$, si on multiplie un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par un réel k, alors le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées$\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.



Les vecteurs $\vec{u}$ et $1,5\vec{u}$ ont le même sens car $1,5 > 0$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ ont des sens contraires car $-2 < 0$.

4.5 Norme d'un vecteur

Propriété : Norme d'un vecteur

Dans une base orthonormée $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$, la norme d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est :

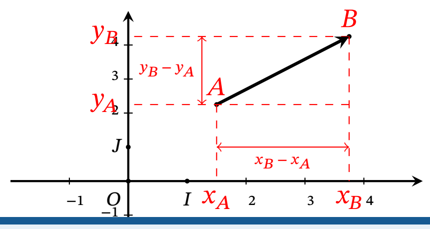
$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

4.6 Coordonnées d'un vecteur

Propriété : Coordonnées d'un vecteur

On considère un repère (O ; I ; J) et deux points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$



Cas particulier :

Le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer les coordonnées d'un vecteur par calcul

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec $A(3\ ;\ -4)$ et $B(-2\ ;\ 1)$.

Méthode : Déterminer les coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle

On donne les points $A(1\ ;\ 2)$, $B(-4\ ;\ 3)$ et $C(1\ ;\ -2)$.
Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

4.7 Colinéarité

Définition : Déterminant de deux vecteurs

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le nombre $\det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = xy' - x'y$.

Propriété : Condition de colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 0$.

Méthode : Vérifier la colinéarité de vecteurs à l'aide du déterminant

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix}$