Parcours d'exercices

Réduire, développer et factoriser

1

CALCUL LITTERAL

Parcours 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22

35 34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24 23

Parcours 2

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22

35 34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24 23

Parcours 3

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22

35 34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24 23

1 Pour s'échauffer

Jour 1 : .../10

Jour 2 : .../10

Jour 3 : .../10

2 Pour s'entraîner

Exercice 1

Réduire les expressions suivantes.

$A = 2x + 9x$

$B = 7x + 6x + 2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 2

Réduire et simplifier les expressions suivantes, si c'est possible.

$A = 5b + 4b$	$C = 7a \times 9a$
$B = 6a + 5$	$D = 8y \times 4$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 3

Réduire, si possible, les expressions.

$A = 11x \times (-5)$

$B = -11x + 5$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 4

Supprimer les parenthèses et réduire.

$A = -(3z + 6) + (z^2 + 7z - 5)$

$B = (-3b^2 - b - 9) - (5b^2 - 8b + 1)$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 5

Réduire les expressions suivantes.

1) $A = x + \dfrac{1}{2}x$

2) $B = -\dfrac{1}{3}x + x$

3) $C = -5x^2 + 3,7x - 15,3x^2 - 18,3x + 2,9x^2$

4) $D = \dfrac{1}{3}x^2 - 3x + 6 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{6}x^2 + 2$

Exercice 6

Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = (x - 3)(x + 3)$

$B = (x + 6)^2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 7

Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = (4x-3)(4x+3)$

$B = (9x+6)^2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 8

Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = \left(\frac{4}{7}x-3\right)\left(\frac{4}{7}x+3\right)^2$

$B = \left(\frac{4}{9}x+6\right)^2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 9

Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = -3-(7x+8)(9x+10)$

$B = 8x+6(10x-1)$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 10

Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = (6x+7)(9x+8)$

$B = (8x-8)(7x+7)$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 11

Développer puis réduire les expressions littérales suivantes.

$A = (-3x-2)(3x-5)-(-4x-1)(-3x+1)$

$B = (t+5)(-2t+2)-(-t-2)^2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 12

Factoriser les expressions suivantes.

$A = 2a+8b$

$B = 28x+49x^2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 13

Factoriser les expressions suivantes.

$A = (2x+2)(3x-2)-(2x+2)(4x-4)$

$B = x(x-3)-4(x-3)$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 14

Factoriser les expressions suivantes.

$A = x^2+2x+1$

$B = x^2-18x+81$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 15

Factoriser les expressions suivantes.

$A = 16x^2-8x+1$

$B = \frac{4}{49}x^2-64$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 16

Factoriser les expressions suivantes.

$A = (2x-6)^2-16$

$B = 64-(8x-7)^2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 17

Factoriser les expressions suivantes.

$A = (2x-6)^2-(4x+8)^2$

$B = 16(8x-7)^2-4(8x-8)^2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 18

Préciser les valeurs interdites éventuelles, puis écrire l'expression sous la forme d'un quotient :

$A = \frac{9}{6x-3} - \frac{9}{2x+8}$.

$B = \frac{4}{x} - \frac{3}{3x+2}$.

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 19

1) Soient K, J et I trois nombres vérifiant l'égalité suivante : $K = J + I$.
Exprimer J en fonction de K et I.

2) Soient e, d et c trois nombres vérifiant l'égalité suivante : $e = d - c$.
Exprimer d en fonction de e et c.

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 20

1) Soient L, P, N, K et M cinq nombres (strictement positifs) vérifiant l'égalité suivante : $L = P + N\sqrt{K+M}$.
Exprimer N en fonction de L, P, K et M.
2) Soient T, U, R et S quatre nombres (avec S non nul) vérifiant l'égalité suivante : $T = \dfrac{U+R}{S}$.
Exprimer R en fonction de T, U et S.

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

3 Pour chercher

Exercice 21

Pour calculer le produit de deux nombres qui diffèrent de 2, il suffit de prendre le carré de leur milieu et de retirer 1.
Démontrer ce résultat.

MathGM

Exercice 22

ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = x+7$ et $AC = 5$ où x désigne un nombre positif.
Exprimer AB^2 en fonction de x sous forme factorisée.

MathGM

Exercice 23

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = (2x-3)^2 - 6$$
Montrer que pour tout réel x,
$$g(x) = (x-3)(4x+1) - (x-6).$$

Exercice 24

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (1-2x)^2 - 9$$
1) Montrer que $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$.
2) Montrer que $f(x) = (4-2x)(-2-2x)$.

MathGM

Exercice 25

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2x^2 - 4x - 30$$
1) Montrer que $f(x) = (2x+6)(x-5)$.
2) Montrer que $f(x) = (2x+2)(x-3) - 24$.

MathGM

Exercice 26

1) On considère $A = (x+3)(2x+1) - x(2x+7)$. Un élève affirme que quel que soit le nombre x, la valeur de A est toujours égale à 3. Comment peut-on vérifier que cet élève à raison ?
2) Soit $C = (2x+6)(x-4)$ et $D = x(2x-2) - 24$. A t-on $C = D$ pour tous les réels x ?

MathGM

Exercice 27

1) Développer et réduire $D = (a+5)^2 - (a-5)^2$.
2) On pose $D = 10\,005^2 - 9\,995^2$.
Sans utiliser la calculatrice, en se servant de la question **1.**, trouver la valeur de D (indiquer les étapes du calcul).

MathGM

Exercice 28

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3(x-3)^2 + 5$$
1) Montrer que $f(x) = 3x^2 - 18x + 32$.
2) Choisir la forme la plus adaptée pour calculer chaque image puis calculer.
a) $f(3)$ b) $f\left(\sqrt{2}\right)$ c) $f(0)$

Exercice 29

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Calculer, en fonction de x, l'aire d'un carré de côté $2x+1$.
2) ABC est un triangle rectangle en A. On a $AB = x+1$, $AC = x+2$. Calculer BC^2 en fonction de x.
3) Un triangle ABC est tel que : $AB = x+5$, $AC = 2x+2$ et $BC^2 = 5x^2 + 16x + 31$. Ce triangle peut-il être rectangle en A ? Justifier.
4) Le côté d'un carré mesure x cm. Un élève affirme que lorsqu'on augmente le côté de ce carré de 2 cm, son aire augmente de $4 \times x$ cm^2. A-t-il raison ?
5) Quand on augmente le côté d'un carré de 1 mètre, l'aire du carré augmente de 5 m^2. Quelle est la longueur du côté du carré au départ ?

MathGM

Exercice 30

Soit $A = \dfrac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$.
1) Calculer A pour $a = 1$ et $b = 5$.
2) Calculer A pour $a = -2$ et $b = -3$.
3) Alex affirme que le nombre A est égal au produit des nombres a et b. A-t-il raison ? Justifier.

DNB

Exercice 31

Trois nombres positifs x, y et z vérifient l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$.
De plus, le carré de la somme des nombres x et y est égal à 41 et le carré de leur différence est égal à 9.
Quelle est la valeur de z ?

MathGM

Exercice 32

1) Soit n un nombre entier positif. Justifiez l'égalité $\dfrac{3}{4n} + \dfrac{1}{3n} + \dfrac{5}{12n} = \dfrac{3}{2n}$.
2) En déduire l'écriture de $\dfrac{3}{14}$ sous la forme d'une somme de trois fractions.

Exercice 33

La distance d de freinage d'un véhicule dépend de sa vitesse et de l'état de la route.

On peut la calculer à l'aide de la formule suivante :

$$d = k \times V^2$$

avec d : distance de freinage en m V : vitesse du véhicule en m/s

k : coefficient dépendant de l'état de la route

$$\begin{cases} k = 0,14 \text{ sur route mouillée} \\ k = 0,08 \text{ sur route sèche.} \end{cases}$$

1) Exprimer V en fonction de d et de k.

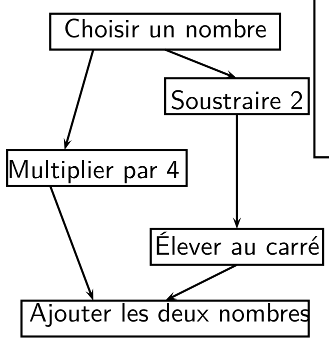
2) Quelle est la vitesse d'un véhicule (en km/h) dont la distance de freinage sur route mouillée est égale à 15 m ? Arrondir à l'unité.

DNB

Exercice 34

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A



PROGRAMME B

- Choisir un nombre
- Calculer son carré
- Ajouter 6 au résultat.

1) a) Montrer que, si l'on choisit le nombre 5, le résultat du programme A est 29.

   b) Quel est le résultat du programme B si on choisit le nombre 5 ?

2) Si on nomme x le nombre choisi, expliquer pourquoi le résultat du programme A peut s'écrire $x^2 + 4$.

3) Quel est le résultat du programme B si l'on nomme x le nombre choisi ?

4) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses et écrire les étapes des éventuels calculs :

   a) « Si l'on choisit le nombre $\frac{2}{3}$, le résultat du programme B est $\frac{58}{9}$. »

   b) « Si l'on choisit un nombre entier, le résultat du programme B est un nombre entier impair. »

   c) « Le résultat du programme B est toujours un nombre positif. »

   d) « Pour un même nombre entier choisi, les résultats des programmes A et B sont ou bien tous les deux des entiers pairs, ou bien tous les deux des entiers impairs. »

DNB

Exercice 35

Programme de calcul :
- Choisir un nombre entier.
- Élever au carré l'entier qui est juste après et l'entier qui est juste avant.
- Calculer la différence de ces deux carrés.
- Retrancher 3 fois le nombre de départ à cette différence.
- Écrire le résultat.

1) Lorsque le nombre de départ choisi est 3, quel est le résultat final ?

2) Quel nombre obtient-on quand on choisit pour départ le nombre 10 ?

3) Quelle conjecture peut-on faire ? Prouver cette conjecture.

MathGM

4 Pour s'évaluer

Temps : 30 minutes

Essai 1 : .../10

Essai 2 : .../10

5 Les documents en pdf

Le parcours

Les indices

Les réponses

Les corrigés

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

1) $A = 6c + 4c + 9 = 10c + 9$

2) $B = 9x + 4x + 7 = 13x + 7$

Corrigé de l'exercice 2

1) $A = 5b + 4b = 9b$

2) $B = 6a + 5 = 6a + 5$

3) $C = 7a \times 9a = 63a^2$

4) $D = 8y \times 4 = 32y$

Corrigé de l'exercice 3

1) $A = 11x \times (-5) = -55x$

2) $B = -11 + 5x$

Corrigé de l'exercice 4

$$\begin{aligned} A &= -(c+6) + (-5c^2 - 3c + 8) \\ &= -c - 6 - 5c^2 - 3c + 8 \\ &= -5c^2 - 4c + 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B &= (-z^2 - 7z + 5) - (-8z^2 + z - 4) \\ &= -z^2 - 7z + 5 + 8z^2 - z + 4 \\ &= 7z^2 - 8z + 9 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5

1) $= \dfrac{3}{2}x$

2) $= \dfrac{2}{3}x$

3) $= -17,4x^2 - 14,6x$

4) $= -\dfrac{1}{2}x^2 - 3x + \dfrac{15}{2}$

Corrigé de l'exercice 6

1) On développe l'expression en utilisant l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,
avec $a = x$ et $b = 4$:
$A = (x-4)(x+4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$

2) On développe l'expression en utilisant l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
avec $a = x$ et $b = 9$:
$$\begin{aligned} B = (x+9)^2 &= x^2 + 2 \times x \times 9 + 9^2 \\ &= x^2 + 18x + 81 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7

1) On développe l'expression en utilisant l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,
avec $a = 3x$ et $b = 4$:
$(3x-4)(3x+4) = (3x)^2 - 4^2 = 9x^2 - 16$

2) On développe l'expression en utilisant l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
avec $a = 7x$ et $b = 9$:
$(7x+9)^2 = (7x)^2 + 2 \times 7x \times 9 + 9^2 = 49x^2 + 126x + 81$

Corrigé de l'exercice 8

1) $A = \left(\dfrac{4}{7}x - 4\right)\left(\dfrac{4}{7}x + 4\right) = \left(\dfrac{4}{7}x\right)^2 - 4^2 = \dfrac{16}{49}x^2 - 16$

2) $B = \left(\dfrac{4}{9}x + 9\right)^2 = \left(\dfrac{4}{9}x\right)^2 + 2 \times \dfrac{4}{9}x \times 9 + 9^2 = \dfrac{16}{81}x^2 + \dfrac{72}{9}x + 81$

Corrigé de l'exercice 9

1) $A = -3 - (7x+8)(9x+10)$
$= -3 - (63x^2 + 70x + 72x + 80)$
$= -3 - 63x^2 - 70x - 72x - 80$
$= -63x^2 - 142x - 83$

2) $B = 8x + 6(10x - 1)$
$= 8x + 60x - 6$
$= 68x - 6$

Corrigé de l'exercice 10

1) $A = (6x+7)(9x+8)$
$A = 54x^2 + 48x + 63x + 56$
$A = 54x^2 + 111x + 56$

2) $B = (8x-8)(7x+7)$
$B = 56x^2 + 56x - 56x - 56$
$B = 56x^2 - 56$

Corrigé de l'exercice 11

$A = (-3x-2)(3x-5) - (-4x-1)(-3x+1)$
$= ((-3x) \times 3x + (-3x) \times (-5) + (-2) \times 3x + (-2) \times (-5)) - ((-4x) \times (-3x) + (-4x) \times 1 + (-1) \times (-3x) + (-1) \times 1)$
$= -9x^2 + 15x - 6x + 10 - (12x^2 - 4x + 3x - 1)$
$= (-9x^2 - (12x^2 - 4x + 3x - 1)) + (15x - 6x) + (10)$
$= -21x^2 + 10x + 11$

$B = (t+5)(-2t+2) - (-t-2)^2$
$= (t \times (-2t) + t \times 2 + 5 \times (-2t) + 5 \times 2) - \left((-t)^2 + 2 \times (-t) \times (-2) + (-2)^2\right)$
$= -2t^2 + 2t - 10t + 10 - (4t + t^2 + 4)$
$= (-2t^2 - (4t + t^2 + 4)) + (2t - 10t) + (10)$
$= -3t^2 - 12t + 6$

Corrigé de l'exercice 12

1) $A = 2a + 8b$
$= 2a + 2 \times 4b$
$= 2(a + 4b)$

2) $B = 28x + 49x^2$
$= 7x \times 4 + 7x \times 7x$
$= 7x(4 + 7x)$

Corrigé de l'exercice 13

$A = x(x+3) + 4(x+3)$.
On remarque que $(x+3)$ est un facteur commun.
$= x(x+3) + 4(x+3)$
$= (x+3)(x+4)$

$B = x(3x+2) + 5(3x+2)$ On remarque que $(3x+2)$ est un facteur commun.
$= x(3x+2) + 5(3x+2)$
$= (3x+2)(x+5)$

Corrigé de l'exercice 14

1) $A = x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \times 1 \times x + 1^2 = (x+1)^2$

2) $B = x^2 - 18x + 81 = x^2 - 2 \times 9 \times x + 9^2 = (x-9)^2$

Corrigé de l'exercice 15

1) $A = 16x^2 - 8x + 1 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2 = (4x-1)^2$

2) $B = \frac{4}{49}x^2 - 64 = \left(\frac{2}{7}x\right)^2 - 8^2 = \left(\frac{2}{7}x - 8\right)\left(\frac{2}{7}x + 8\right)$

Corrigé de l'exercice 16

1) On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, avec $a = 2x - 6$ et $b = 4$.

$$\begin{aligned}(2x-6)^2 - 16 &= (2x-6)^2 - 4^2\\ &= [(2x-6) - 4]\,[(2x-6)+4]\\ &= (2x-10)(2x-2)\end{aligned}$$

2) On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, avec $a = 8$ et $b = 8x - 7$.

$$\begin{aligned}64 - (8x-7)^2 &= 8^2 - (8x-7)^2\\ &= [8 - (8x-7)]\,[8 + (8x-7)]\\ &= (8 - 8x + 7)(8 + 8x - 7)\\ &= (-8x+15)(8x+1)\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 17

1) On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, avec $a = 2x - 6$ et $b = 4x + 8$.

$$\begin{aligned}(2x-6)^2 - (4x+8)^2 &= [(2x-6) - (4x+8)]\,[(2x-6) + (4x+8)]\\ &= (2x - 6 - 4x - 8)(2x - 6 + 4x + 8)\\ &= (-2x-14)(6x+2)\end{aligned}$$

2) On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, avec $a = 4(8x-7)$ et $b = 2(8x-8)$.

$16(8x-7)^2 - 4(8x-8)^2 = [(4 \times 8x - 7 \times 4) - (2 \times 8x - 8 \times 2)]\,[(4 \times 8x - 7 \times 4) + (2 \times 8x - 8 \times 2)] \quad = (32x - 28 - 16x + 16)($

Corrigé de l'exercice 18

1. L'équation $6x - 3 = 0$ a pour solution $\frac{1}{2}$.
   L'équation $2x + 8 = 0$ a pour solution -4.
   $\frac{1}{2}$ et -4 sont donc des valeurs interdites pour l'expression.
   Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-4\,;\,\frac{1}{2}\right\}$,
   $$\begin{aligned}\frac{9}{6x-3} - \frac{9}{2x+8} &= \frac{9(2x+8)}{(6x-3)(2x+8)} - \frac{9(6x-3)}{(6x-3)(2x+8)}\\ &= \frac{9(2x+8) - 9(6x-3)}{(6x-3)(2x+8)}\\ &= \frac{-36x+99}{(6x-3)(2x+8)}\end{aligned}$$
2. Déterminer les valeurs interdites de cette expression, revient à déterminer les valeurs qui annulent le dénominateur de $\frac{3}{3x+2}$, puisque la division par 0 n'existe pas.
   L'équation $3x + 2 = 0$ a pour solution $\frac{-2}{3}$.
   0 et $\frac{-2}{3}$ sont donc des valeurs interdites pour l'expression.
   Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-2}{3}\,;\,0\right\}$,
   $$\begin{aligned}\frac{4}{x} - \frac{3}{3x+2} &= \frac{4(3x+2)}{x(3x+2)} - \frac{3x}{x(3x+2)}\\ &= \frac{12x + 8 - 3x}{x(3x+2)}\\ &= \frac{9x+8}{x(3x+2)}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 19

1) On isole J dans un membre de l'égalité :

$$K = J + I$$
$$K - I = J - I - I$$
$$K - I = J$$

Une expression de J en fonction de K et I est $J = K - I$.

2) On isole d dans un membre de l'égalité :

$$e = d - c$$
$$e + c = d - c + c$$
$$e + c = d$$

Une expression de d en fonction de e et c est $d = e + c$.

Corrigé de l'exercice 20

1) On isole N dans un membre de l'égalité :

$$L = P + N\sqrt{K+M}$$
$$L - P = N\sqrt{K+M}$$
$$\frac{L-P}{\sqrt{K+M}} = N$$

Une expression de N en fonction de L, P, K et M est $N = \dfrac{L-P}{\sqrt{K+M}}$.

2) On isole R dans un membre de l'égalité :

$$T = \frac{U+R}{S}$$
$$T \times S = U + R$$
$$T \times S - U = R$$

Une expression de R en fonction de T, U et S est $R = S \times T - U$.

Corrigé de l'exercice 21

Pour démontrer que le produit de deux nombres qui diffèrent de 2 peut être calculé en prenant le carré de leur milieu et en retirant 1, considérons deux nombres x et $x + 2$.

Calculons le produit $x \times (x + 2)$:

$$x \times (x+2) = x^2 + 2x$$

Déterminons maintenant le milieu des deux nombres x et $x + 2$:

$$\frac{x + (x+2)}{2} = \frac{2x+2}{2} = x + 1$$

Prenons le carré de ce milieu :

$$(x+1)^2$$

Développons cette expression :

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Ensuite, retirons 1 de cette expression :

$$(x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 - 1 = x^2 + 2x$$

Nous constatons que cette expression est égale à $x \times (x + 2)$:

$$x^2 + 2x = x \times (x+2)$$

Ainsi, nous avons démontré que :

$$x \times (x+2) = \left(\frac{x+(x+2)}{2}\right)^2 - 1$$

Cela montre que le produit de deux nombres qui diffèrent de 2 est égal au carré de leur milieu moins 1.

Corrigé de l'exercice 22

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = x + 7$ et $AC = 5$, où x désigne un nombre positif. Nous devons exprimer AB^2 en fonction de x sous forme factorisée.

Dans un triangle rectangle, le théorème de Pythagore s'énonce comme suit :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Nous connaissons les longueurs BC et AC, alors nous les substituons dans l'équation :

$$(x+7)^2 = AB^2 + 5^2$$

Développons $(x+7)^2$:

$$(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$$

Et 5^2 :

$$5^2 = 25$$

Substituons ces valeurs dans l'équation :

$$x^2 + 14x + 49 = AB^2 + 25$$

Isolons AB^2 :

$$AB^2 = x^2 + 14x + 49 - 25$$

Simplifions :

$$AB^2 = x^2 + 14x + 24$$

Pour exprimer AB^2 sous forme factorisée, nous devons factoriser $x^2 + 14x + 24$. Nous cherchons deux nombres dont le produit est 24 et la somme est 14. Ces nombres sont 12 et 2. Donc :

$$x^2 + 14x + 24 = (x+12)(x+2)$$

Ainsi, la forme factorisée de AB^2 en fonction de x est :

$$AB^2 = (x+12)(x+2)$$

Corrigé de l'exercice 23

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x-3)^2 - 6$$

Montrons que pour tout réel x,

$$g(x) = (x-3)(4x+1) - (x-6)$$

Commençons par développer $g(x)$:

$$g(x) = (2x-3)^2 - 6$$

Développons $(2x-3)^2$:

$$(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

Donc,

$$g(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 6 = 4x^2 - 12x + 3$$

Ensuite, développons $(x-3)(4x+1)-(x-6)$:
Calculons $(x-3)(4x+1)$:

$$\begin{aligned}(x-3)(4x+1) &= x\cdot 4x + x\cdot 1 - 3\cdot 4x - 3\cdot 1\\ &= 4x^2 + x - 12x - 3\\ &= 4x^2 - 11x - 3\end{aligned}$$

Ensuite, considérons $(x-3)(4x+1)-(x-6)$:

$$\begin{aligned}(x-3)(4x+1)-(x-6) &= 4x^2 - 11x - 3 - x + 6\\ &= 4x^2 - 12x + 3\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré que pour tout réel x,

$$g(x) = (x-3)(4x+1)-(x-6)$$

Corrigé de l'exercice 24

1) Commençons par développer l'expression de $f(x)$:

$$f(x) = (1-2x)^2 - 9$$

Développons $(1-2x)^2$:

$$(1-2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$$

Donc,

$$f(x) = 1 - 4x + 4x^2 - 9$$

Simplifions l'expression :

$$f(x) = 4x^2 - 4x + 1 - 9$$
$$f(x) = 4x^2 - 4x - 8$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$f(x) = 4x^2 - 4x - 8$$

2) Montrer que $f(x) = (4-2x)(-2-2x)$.
Pour montrer cette égalité, nous devons factoriser l'expression obtenue précédemment $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$.
Cherchons à factoriser $4x^2 - 4x - 8$. Remarquons que :

$$4x^2 - 4x - 8 = 4(x^2 - x - 2)$$

Factorisons $x^2 - x - 2$:

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

Donc,

$$4(x^2 - x - 2) = 4(x - 2)(x + 1)$$

Cependant, nous devons exprimer $f(x)$ sous la forme $(4 - 2x)(-2 - 2x)$.
Considérons l'expression :

$$(4 - 2x)(-2 - 2x)$$

Développons cette expression :

$$\begin{aligned}(4 - 2x)(-2 - 2x) &= 4 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2x) - 2x \cdot (-2) - 2x \cdot (-2x) \\ &= -8 - 8x + 4x + 4x^2 \\ &= 4x^2 - 4x - 8\end{aligned}$$

Nous constatons que cette expression est équivalente à $f(x)$. Donc,

$$f(x) = (4 - 2x)(-2 - 2x)$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$f(x) = (4 - 2x)(-2 - 2x)$$

Corrigé de l'exercice 25
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 30$$

1) Développons l'expression $(2x + 6)(x - 5)$ pour vérifier qu'elle est égale à $f(x)$:

$$\begin{aligned}(2x + 6)(x - 5) &= 2x \cdot x + 2x \cdot (-5) + 6 \cdot x + 6 \cdot (-5) \\ &= 2x^2 - 10x + 6x - 30 \\ &= 2x^2 - 4x - 30\end{aligned}$$

Nous constatons que cette expression est égale à $f(x)$. Donc,

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 30 = (2x + 6)(x - 5)$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$f(x) = (2x + 6)(x - 5)$$

2) Commençons par développer l'expression $(2x + 2)(x - 3)$:

$$\begin{aligned}(2x + 2)(x - 3) &= 2x(x - 3) + 2(x - 3) \\ &= 2x^2 - 6x + 2x - 6 \\ &= 2x^2 - 4x - 6\end{aligned}$$

Maintenant, considérons $(2x + 2)(x - 3) - 24$:

$$\begin{aligned}(2x + 2)(x - 3) - 24 &= 2x^2 - 4x - 6 - 24 \\ &= 2x^2 - 4x - 30\end{aligned}$$

Nous constatons que cette expression est équivalente à $f(x)$. Donc,

$$f(x) = (2x + 2)(x - 3) - 24$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$f(x) = (2x + 2)(x - 3) - 24$$

Corrigé de l'exercice 26
Développons les deux expressions dans A pour vérifier l'affirmation :

$$A = (x + 3)(2x + 1) - x(2x + 7)$$

Calculons $(x + 3)(2x + 1)$:

$$(x + 3)(2x + 1) = x(2x + 1) + 3(2x + 1) = 2x^2 + x + 6x + 3 = 2x^2 + 7x + 3$$

Calculons $x(2x + 7)$:

$$x(2x + 7) = 2x^2 + 7x$$

Soustrayons ces deux résultats :

$$A = (2x^2 + 7x + 3) - (2x^2 + 7x) = 2x^2 + 7x + 3 - 2x^2 - 7x = 3$$

Ainsi, nous avons vérifié que :

$$A = 3$$

Nous avons montré que, quel que soit le nombre x, la valeur de A est toujours égale à 3. L'élève a donc raison.
Développons les expressions C et D pour vérifier s'ils sont égaux pour tous les réels x :

$$C = (2x + 6)(x - 4)$$

Développons $(2x + 6)(x - 4)$:

$$(2x + 6)(x - 4) = 2x(x - 4) + 6(x - 4) = 2x^2 - 8x + 6x - 24 = 2x^2 - 2x - 24$$

Développons maintenant $D = x(2x - 2) - 24$:

$$D = x(2x - 2) - 24 = 2x^2 - 2x - 24$$

Nous constatons que les deux expressions sont égales :

$$C = 2x^2 - 2x - 24$$

$$D = 2x^2 - 2x - 24$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$C = D$$

pour tous les réels x.
Corrigé de l'exercice 27

1. $D = (a + 5)^2 - (a - 5)^2 = 20a$.
2. Avec $a = 10000$, on obtient $D = 200000$.

Corrigé de l'exercice 28

1) développer l'expression.

2) a) canonique : $3(3-3)^2+5=5$

   b) développer : $3\left(\sqrt{2}\right)^2-18\sqrt{2}+32=38-18\sqrt{2}$

   c) développer : $0^2-18\times 0+32=32$

Corrigé de l'exercice 29

1) L'aire d'un carré est donnée par côté^2.

$$\begin{aligned} A &= (2x+1)^2 \\ &= (2x+1)(2x+1) \\ &= 4x^2+4x+1. \end{aligned}$$

2) On utilise le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2+AC^2 \\ &= (x+1)^2+(x+2)^2 \\ &= (x^2+2x+1)+(x^2+4x+4) \\ &= x^2+2x+1+x^2+4x+4 \\ &= 2x^2+6x+5. \end{aligned}$$

3) On a :

$$\begin{aligned} AB^2+AC^2 &= (x+5)^2+(2x+2)^2 \\ &= x^2+10x+25+4x^2+8x+4 \\ &= 5x^2+18x+29. \end{aligned}$$

$BC^2=5x^2+16x+31.$

L'équation $5x^2+18x+29=5x^2+16x+31$ est équivalente à $2x-2=0$ qui a pour solution $x=1$.

Il existe une valeur de x pour laquelle ABC est rectangle en A : $x=1$.

4) On note A_1 l'aire du carré initial et A_2 celle du nouveau carré.

$$\begin{aligned} A_1 &= x^2 \\ A_2 &= (x+2)^2 \\ &= x^2+4x+4 \\ \Delta A &= A_2-A_1 \\ &= (x^2+4x+4)-x^2 \\ &= 4x+4. \end{aligned}$$

L'affirmation de l'élève est que l'augmentation est $4x$.

En réalité, l'augmentation est $4x+4$, donc l'élève n'a pas raison.

5) On note A_1 l'aire du carré initial et A_2 celle du carré agrandi.

$$\begin{aligned} A_1 &= x^2 \\ A_2 &= (x+1)^2 \\ &= x^2+2x+1 \\ A_2-A_1 &= (x^2+2x+1)-x^2 \\ &= 2x+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+1 &= 5 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 30

1) • A avec $a = 1$ et $b = 5$.
   $(a+b)^2 = (1+5)^2 = 6^2 = 36$, donc $A = 36$.
   $(a-b)^2 = (1-5)^2 = (-4)^2 = 16$, donc $B = 16$.
   $A - B = 36 - 16 = 20$.
   $\frac{1}{4} \times 20 = 5$.

2) • Avec $a = -2$ et $b = -3$, on obtient :
   $(a+b)^2 = (-2+(-3))^2 = (-5)^2 = 25$, donc $A = 25$.
   $(a-b)^2 = (-2-(-3))^2 = 1^2 = 1$, donc $B = 1$.
   $A - B = 25 - 1 = -24$.
   $\frac{1}{4} \times 24 = 6$.

3) Pour démontrer cette conjecture,on utilise un calcul littéral.
   On note les deux nombres choisis a et b. On obtient :

   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, donc $A = a^2 + 2ab + b^2$.

   $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, donc $B = a^2 - 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned} A - B &= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2} \\ &= 4ab \end{aligned}$$

   $\frac{1}{4} \times 4ab = ab$.
   On vient de prouver que le résultat final est bien le produit des deux nombres de départ.

Corrigé de l'exercice 31

On traduit les données de l'énoncé :

$$x^2 + y^2 = z^2,$$
$$(x+y)^2 = 41,$$
$$(x-y)^2 = 9.$$

Nous devons trouver la valeur de z.
Tout d'abord, développons les deux équations fournies :

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= 41 \\ x^2 + 2xy + y^2 &= 41, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &= 9 \\ x^2 - 2xy + y^2 &= 9. \end{aligned}$$

Nous avons donc le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2xy &= 41, \\ x^2 + y^2 - 2xy &= 9. \end{aligned}$$

Pour trouver $x^2 + y^2$ et xy, additionnons et soustrayons ces deux équations :

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + 2xy) + (x^2 + y^2 - 2xy) &= 41 + 9 \\ 2(x^2 + y^2) &= 50 \\ x^2 + y^2 &= 25, \end{aligned}$$

et maintenant, soustrayons les équations :

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+2xy)-(x^2+y^2-2xy) &= 41-9\\ 4xy &= 32\\ xy &= 8.\end{aligned}$$

Maintenant, nous savons que $x^2+y^2=25$ et $xy=8$.
Revenons à notre première équation :

$$\begin{aligned}x^2+y^2 &= z^2\\ 25 &= z^2\\ z &= \sqrt{25}\\ z &= 5.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 32

1) Pour justifier l'égalité, on commence par le membre de gauche afin d'obtenir le membre de droite.
$$\begin{aligned}\frac{3}{4n}+\frac{1}{3n}+\frac{5}{12n} &= \frac{3\times 3}{4n\times 3}+\frac{1\times 4}{3n\times 4}+\frac{5}{12n}\\ &= \frac{9}{12n}+\frac{4}{12n}+\frac{5}{12n}\\ &= \frac{17}{12n}\end{aligned}$$
2) On identifie $\frac{3}{2n}$ à $\frac{3}{14}$. On obtient $n=7$.
   Avec $n=7$, on a : $\frac{3}{14}=\frac{3}{28}+\frac{1}{21}+\frac{5}{84}$.

Corrigé de l'exercice 33

1) On exprime V en fonction de d et de k.
$$\begin{aligned}d &= k\times V^2\\ V^2 &= \frac{d}{k}\\ V &= \sqrt{\frac{d}{k}}.\end{aligned}$$

2) On a :
$$\begin{aligned}&d=15\text{ m},\quad k=0{,}14\text{ (sur route mouillée)}\\ &V=\sqrt{\frac{d}{k}}\\ &V=\sqrt{\frac{15}{0{,}14}}\\ &V\approx\sqrt{107{,}14}\\ &V\approx 10{,}35\text{ m/s}.\end{aligned}$$

   Pour convertir V de m/s en km/h :
$$\begin{aligned}V_{\text{km/h}} &= V\times 3{,}6\\ V_{\text{km/h}} &\approx 10{,}35\times 3{,}6\\ V_{\text{km/h}} &\approx 37{,}26.\end{aligned}$$

   Donc, la vitesse du véhicule est environ : $\boxed{37\text{ km/h}}$

Corrigé de l'exercice 34

1) a) Choisissons le nombre 5.

   1. $5\times 4=20$
   2. $5-2=3$
   3. $3^2=9$
   4. $20+9=29$

b) Choisissons le nombre 5.

1. $5^2 = 25$
2. $25 + 6 = 31$

Le résultat est donc 31.

2) Notons le nombre choisi x.

1. $x \times 4 = 4x$
2. $4x + (x-2)^2$
3. $4x + x^2 - 4x + 4$
4. $x^2 + 4$

3) Notons le nombre choisi x.

1. $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

Le résultat est donc $x^2 - 4x + 4$

4) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses et écrire les étapes des éventuels calculs :

a) Choisissons le nombre $\frac{2}{3}$.

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
2. $\frac{4}{9} + 6 = \frac{4}{9} + \frac{54}{9} = \frac{58}{9}$

L'affirmation est donc vraie.

b) Prenons un contre exemple : $n = 2$.

1. $n^2 = 4$
2. $4 + 6 = 10$ est un entier pair

L'affirmation est donc fausse.

c) Le résultat du programme B est $(x-2)^2$. Un carré est toujours positif.

L'affirmation est donc vraie.

d) Pour un nombre entier x, les résultats des programmes A et B sont respectivement $x^2 - 4x + 4$ et $x^2 + 4$.
• Si x est pair, alors il existe un entier p tel que $x = 2p$
$x^2 - 4x + 44p^2 - 8p + 4 = 4(p^2 - 2p + 1) = 4(p-1)^2$ qui est pair.
De même que $x^2 + 4 = 4p^2 + 4 = 4(p^2 + 1)$. Les deux résultats sont donc pairs.
• Si x est impair, alors il existe un entier p tel que $x = 2p + 1$

$$\begin{aligned} x^2-4x+4 &= (2p+1)^2-4(2p+1)+4 \\ &= 4p^2+4p+1-8p-4+4 \\ &= 4p^2-4p+1 \\ &= 4(p^2-p)+1 \end{aligned}$$

qui est impair.
De même que

$$\begin{aligned} x^2+4 &= (2p+1)^2+4 \\ &= 4p^2+4p+5 \\ &= 4(p^2-p+1)+1 \end{aligned}$$

qui est impair>.
les deux résultats sont donc impairs.
x a donc la même parité que les deux programmes.
L'affirmation est vraie.

Corrigé de l'exercice 35

1) On a :

Nombre de départ $n = 3$.

L'entier juste après $n + 1 = 4$.

L'entier juste avant $n - 1 = 2$.

Carré de l'entier juste après $(n + 1)^2 = 4^2 = 16$.

Carré de l'entier juste avant $(n - 1)^2 = 2^2 = 4$.

Différence des carrés $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 16 - 4 = 12$.

Retrancher 3 fois le nombre de départ à cette différence

$12 - 3 \times 3 = 12 - 9 = 3$.

Le résultat final est 3.

2) On a :

Nombre de départ $n = 10$.

L'entier juste après $n + 1 = 11$.

L'entier juste avant $n - 1 = 9$.

Carré de l'entier juste après $(n + 1)^2 = 11^2 = 121$.

Carré de l'entier juste avant $(n - 1)^2 = 9^2 = 81$.

Différence des carrés $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 121 - 81 = 40$.

Retrancher 3 fois le nombre de départ à cette différence

$40 - 3 \times 10 = 40 - 30 = 10$.

Le résultat final est 10.

3) Conjecture : Le résultat final est toujours égal au nombre de départ.

Prouvons cette conjecture en utilisant un nombre entier n quelconque :

Nombre de départ n.

L'entier juste après $n + 1$.

L'entier juste avant $n - 1$.

Carré de l'entier juste après $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

Carré de l'entier juste avant $(n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1$.

Différence des carrés

$(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = (n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1)$

$= n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1$

$= 4n$.

Retrancher 3 fois le nombre de départ à cette différence

$4n - 3n = n$.

Le résultat final est n.

Donc, le résultat final est toujours égal au nombre de départ, ce qui confirme notre conjecture.