

Corrigé de l'exercice 1

- 1) $A = 6c + 4c + 9 = 10c + 9$
 2) $B = 9x + 4x + 7 = 13x + 7$

Corrigé de l'exercice 2

- 1) $A = 5b + 4b = 9b$
 2) $B = 6a + 5 = 6a + 5$
 3) $C = 7a \times 9a = 63a^2$
 4) $D = 8y \times 4 = 32y$

Corrigé de l'exercice 3

- 1) $A = 11x \times (-5) = -55x$
 2) $B = -11 + 5x$

Corrigé de l'exercice 4

$$\begin{aligned} A &= -(c+6) + (-5c^2 - 3c + 8) & B &= (-z^2 - 7z + 5) - (-8z^2 + z - 4) \\ &= -c - 6 - 5c^2 - 3c + 8 & &= -z^2 - 7z + 5 + 8z^2 - z + 4 \\ &= -5c^2 - 4c + 2 & &= 7z^2 - 8z + 9 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5

- 1) $= \frac{3}{2}x$
 2) $= \frac{2}{3}x$
 3) $= -17, 4x^2 - 14, 6x$
 4) $= -\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{15}{2}$

Corrigé de l'exercice 6

- 1) On développe l'expression en utilisant l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,
 avec $a = x$ et $b = 4$:
 $A = (x-4)(x+4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$
- 2) On développe l'expression en utilisant l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
 avec $a = x$ et $b = 9$:
 $B = (x+9)^2 = x^2 + 2 \times x \times 9 + 9^2$
 $= x^2 + 18x + 81$

Corrigé de l'exercice 7

- 1) On développe l'expression en utilisant l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,
 avec $a = 3x$ et $b = 4$:
 $(3x-4)(3x+4) = (3x)^2 - 4^2 = 9x^2 - 16$
- 2) On développe l'expression en utilisant l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
 avec $a = 7x$ et $b = 9$:
 $(7x+9)^2 = (7x)^2 + 2 \times 7x \times 9 + 9^2 = 49x^2 + 126x + 81$

Corrigé de l'exercice 8

- 1) $A = \left(\frac{4}{7}x - 4\right) \left(\frac{4}{7}x + 4\right) = \left(\frac{4}{7}x\right)^2 - 4^2 = \frac{16}{49}x^2 - 16$
- 2) $B = \left(\frac{4}{9}x + 9\right)^2 = \left(\frac{4}{9}x\right)^2 + 2 \times \frac{4}{9}x \times 9 + 9^2 = \frac{16}{81}x^2 + \frac{72}{9}x + 81$

Corrigé de l'exercice 9

- 1) $A = -3 - (7x+8)(9x+10)$
 $= -3 - (63x^2 + 70x + 72x + 80)$
 $= -3 - 63x^2 - 70x - 72x - 80$
 $= -63x^2 - 142x - 83$
- 2) $B = 8x + 6(10x-1)$
 $= 8x + 60x - 6$
 $= 68x - 6$

Corrigé de l'exercice 10

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= (6x + 7)(9x + 8) \\ A &= 54x^2 + 48x + 63x + 56 \\ A &= \mathbf{54x^2 + 111x + 56} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad B &= (8x - 8)(7x + 7) \\ B &= 56x^2 + 56x - 56x - 56 \\ B &= \mathbf{56x^2 - 56} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 11

$$\begin{aligned} A &= (-3x - 2)(3x - 5) - (-4x - 1)(-3x + 1) \\ &= ((-3x) \times 3x + (-3x) \times (-5) + (-2) \times 3x + (-2) \times (-5)) - ((-4x) \times (-3x) + (-4x) \times 1 + (-1) \times (-3x) + (-1) \times (-5)) \\ &= \mathbf{-9x^2 + 15x - 6x + 10 - (12x^2 - 4x + 3x - 1)} \\ &= (-9x^2 - (12x^2 - 4x + 3x - 1)) + (15x - 6x) + (10) \\ &= \mathbf{-21x^2 + 10x + 11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (t + 5)(-2t + 2) - (-t - 2)^2 \\ &= (t \times (-2t) + t \times 2 + 5 \times (-2t) + 5 \times 2) - ((-t)^2 + 2 \times (-t) \times (-2) + (-2)^2) \\ &= \mathbf{-2t^2 + 2t - 10t + 10 - (4t + t^2 + 4)} \\ &= (-2t^2 - (4t + t^2 + 4)) + (2t - 10t) + (10) \\ &= \mathbf{-3t^2 - 12t + 6} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 12

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= 2a + 8b \\ &= 2a + 2 \times 4b \\ &= \mathbf{2(a + 4b)} \\ 2) \quad B &= 28x + 49x^2 \\ &= 7x \times 4 + 7x \times 7x \\ &= \mathbf{7x(4 + 7x)} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 13

$$\begin{aligned} A &= x(x + 3) + 4(x + 3). \\ \text{On remarque que } (x + 3) &\text{ est un facteur commun.} \\ &= \mathbf{x(x + 3) + 4(x + 3)} \\ &= \mathbf{(x + 3)(x + 4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= x(3x + 2) + 5(3x + 2) \text{ On remarque que } (3x + 2) \text{ est un facteur commun.} \\ &= \mathbf{x(3x + 2) + 5(3x + 2)} \\ &= \mathbf{(3x + 2)(x + 5)} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 14

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \times 1 \times x + 1^2 = (x + 1)^2 \\ 2) \quad B &= x^2 - 18x + 81 = x^2 - 2 \times 9 \times x + 9^2 = (x - 9)^2 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 15

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= 16x^2 - 8x + 1 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2 = (4x - 1)^2 \\ 2) \quad B &= \frac{4}{49}x^2 - 64 = \left(\frac{2}{7}x\right)^2 - 8^2 = \left(\frac{2}{7}x - 8\right)\left(\frac{2}{7}x + 8\right) \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 16

$$\begin{aligned} 1) \quad \text{On reconnaît l'identité remarquable } a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \text{ avec } a = \mathbf{2x - 6} \text{ et } b = \mathbf{4}. \\ (2x - 6)^2 - 16 &= (2x - 6)^2 - 4^2 \\ &= [(2x - 6) - 4][(2x - 6) + 4] \\ &= (2x - 10)(2x - 2) \\ 2) \quad \text{On reconnaît l'identité remarquable } a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \text{ avec } a = \mathbf{8} \text{ et } b = \mathbf{8x - 7}. \\ 64 - (8x - 7)^2 &= 8^2 - (8x - 7)^2 \\ &= [8 - (8x - 7)][8 + (8x - 7)] \\ &= (8 - 8x + 7)(8 + 8x - 7) \\ &= \mathbf{(-8x + 15)(8x + 1)} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 17

- 1) On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, avec $a = 2x - 6$ et $b = 4x + 8$.

$$\begin{aligned}(2x - 6)^2 - (4x + 8)^2 &= [(2x - 6) - (4x + 8)][(2x - 6) + (4x + 8)] \\ &= (2x - 6 - 4x - 8)(2x - 6 + 4x + 8) \\ &= (-2x - 14)(6x + 2)\end{aligned}$$

- 2) On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, avec $a = 4(8x - 7)$ et $b = 2(8x - 8)$.

$$16(8x - 7)^2 - 4(8x - 8)^2 = [(4 \times 8x - 7 \times 4) - (2 \times 8x - 8 \times 2)][(4 \times 8x - 7 \times 4) + (2 \times 8x - 8 \times 2)] = (32x - 28 - 16x + 16) \dots$$

Corrigé de l'exercice 18

- 1) L'équation $6x - 3 = 0$ a pour solution $\frac{1}{2}$.

L'équation $2x + 8 = 0$ a pour solution -4 .

$\frac{1}{2}$ et -4 sont donc des valeurs interdites pour l'expression.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-4; \frac{1}{2}\right\}$,

$$\begin{aligned}\frac{9}{6x - 3} - \frac{9}{2x + 8} &= \frac{9(2x + 8)}{(6x - 3)(2x + 8)} - \frac{9(6x - 3)}{(6x - 3)(2x + 8)} \\ &= \frac{9(2x + 8) - 9(6x - 3)}{(6x - 3)(2x + 8)} \\ &= \frac{-36x + 99}{(6x - 3)(2x + 8)}\end{aligned}$$

- 2) Déterminer les valeurs interdites de cette expression, revient à déterminer les valeurs qui annulent le dénominateur de $\frac{3}{3x + 2}$, puisque la division par 0 n'existe pas.

L'équation $3x + 2 = 0$ a pour solution $-\frac{2}{3}$.

0 et $-\frac{2}{3}$ sont donc des valeurs interdites pour l'expression.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}$,

$$\begin{aligned}\frac{4}{x} - \frac{3}{3x + 2} &= \frac{4(3x + 2)}{x(3x + 2)} - \frac{3x}{x(3x + 2)} \\ &= \frac{12x + 8 - 3x}{x(3x + 2)} \\ &= \frac{9x + 8}{x(3x + 2)}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 19

- 1) On isole J dans un membre de l'égalité :

$$K = J + I$$

$$K - I = J + I - I$$

$$K - I = J$$

Une expression de J en fonction de K et I est $J = K - I$.

- 2) On isole d dans un membre de l'égalité :

$$e = d - c$$

$$e + c = d - c + c$$

$$e + c = d$$

Une expression de d en fonction de e et c est $d = e + c$.

Corrigé de l'exercice 20

- 1) On isole N dans un membre de l'égalité :

$$L = P + N\sqrt{K + M}$$

$$L - P = N\sqrt{K + M}$$

$$\frac{L - P}{\sqrt{K + M}} = N$$

Une expression de N en fonction de L , P , K et M est $N = \frac{L - P}{\sqrt{K + M}}$.

2) On isole R dans un membre de l'égalité :

$$T = \frac{U + R}{S}$$

$$T \times S = U + R$$

$$T \times S - U = R$$

Une expression de R en fonction de T , U et S est $R = S \times T - U$.

Corrigé de l'exercice 21

Pour démontrer que le produit de deux nombres qui diffèrent de 2 peut être calculé en prenant le carré de leur milieu et en retirant 1, considérons deux nombres x et $x + 2$.

Calculons le produit $x \times (x + 2)$:

$$x \times (x + 2) = x^2 + 2x$$

Déterminons maintenant le milieu des deux nombres x et $x + 2$:

$$\frac{x + (x + 2)}{2} = \frac{2x + 2}{2} = x + 1$$

Prenons le carré de ce milieu :

$$(x + 1)^2$$

Développons cette expression :

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Ensuite, retirons 1 de cette expression :

$$(x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 - 1 = x^2 + 2x$$

Nous constatons que cette expression est égale à $x \times (x + 2)$:

$$x^2 + 2x = x \times (x + 2)$$

Ainsi, nous avons démontré que :

$$x \times (x + 2) = \left(\frac{x + (x + 2)}{2} \right)^2 - 1$$

Cela montre que le produit de deux nombres qui diffèrent de 2 est égal au carré de leur milieu moins 1.

Corrigé de l'exercice 22

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = x + 7$ et $AC = 5$, où x désigne un nombre positif. Nous devons exprimer AB^2 en fonction de x sous forme factorisée.

Dans un triangle rectangle, le théorème de Pythagore s'énonce comme suit :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Nous connaissons les longueurs BC et AC , alors nous les substituons dans l'équation :

$$(x + 7)^2 = AB^2 + 5^2$$

Développons $(x + 7)^2$:

$$(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$$

Et 5^2 :

$$5^2 = 25$$

Substituons ces valeurs dans l'équation :

$$x^2 + 14x + 49 = AB^2 + 25$$

Isolons AB^2 :

$$AB^2 = x^2 + 14x + 49 - 25$$

Simplifions :

$$AB^2 = x^2 + 14x + 24$$

Pour exprimer AB^2 sous forme factorisée, nous devons factoriser $x^2 + 14x + 24$. Nous cherchons deux nombres dont le produit est 24 et la somme est 14. Ces nombres sont 12 et 2. Donc :

$$x^2 + 14x + 24 = (x + 12)(x + 2)$$

Ainsi, la forme factorisée de AB^2 en fonction de x est :

$$AB^2 = (x + 12)(x + 2)$$

Corrigé de l'exercice 23

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = (2x - 3)^2 - 6$$

Montrons que pour tout réel x ,

$$g(x) = (x - 3)(4x + 1) - (x - 6)$$

Commençons par développer $g(x)$:

$$g(x) = (2x - 3)^2 - 6$$

Développons $(2x - 3)^2$:

$$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

Donc,

$$g(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 6 = 4x^2 - 12x + 3$$

Ensuite, développons $(x - 3)(4x + 1) - (x - 6)$:

Calculons $(x - 3)(4x + 1)$:

$$\begin{aligned}(x - 3)(4x + 1) &= x \cdot 4x + x \cdot 1 - 3 \cdot 4x - 3 \cdot 1 \\ &= 4x^2 + x - 12x - 3 \\ &= 4x^2 - 11x - 3\end{aligned}$$

Ensuite, considérons $(x - 3)(4x + 1) - (x - 6)$:

$$\begin{aligned}(x - 3)(4x + 1) - (x - 6) &= 4x^2 - 11x - 3 - x + 6 \\ &= 4x^2 - 12x + 3\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré que pour tout réel x ,

$$g(x) = (x - 3)(4x + 1) - (x - 6)$$

Corrigé de l'exercice 24

1) Commençons par développer l'expression de $f(x)$:

$$f(x) = (1 - 2x)^2 - 9$$

Développons $(1 - 2x)^2$:

$$(1 - 2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$$

Donc,

$$f(x) = 1 - 4x + 4x^2 - 9$$

Simplifions l'expression :

$$\begin{aligned}f(x) &= 4x^2 - 4x + 1 - 9 \\ f(x) &= 4x^2 - 4x - 8\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$f(x) = 4x^2 - 4x - 8$$

2) Montrer que $f(x) = (4 - 2x)(-2 - 2x)$.

Pour montrer cette égalité, nous devons factoriser l'expression obtenue précédemment $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$. Cherchons à factoriser $4x^2 - 4x - 8$. Remarquons que :

$$4x^2 - 4x - 8 = 4(x^2 - x - 2)$$

Factorisons $x^2 - x - 2$:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

Donc,

$$4(x^2 - x - 2) = 4(x - 2)(x + 1)$$

Cependant, nous devons exprimer $f(x)$ sous la forme $(4 - 2x)(-2 - 2x)$.

Considérons l'expression :

$$(4 - 2x)(-2 - 2x)$$

Développons cette expression :

$$\begin{aligned}(4 - 2x)(-2 - 2x) &= 4 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2x) - 2x \cdot (-2) - 2x \cdot (-2x) \\ &= -8 - 8x + 4x + 4x^2 \\ &= 4x^2 - 4x - 8\end{aligned}$$

Nous constatons que cette expression est équivalente à $f(x)$. Donc,

$$f(x) = (4 - 2x)(-2 - 2x)$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$f(x) = (4 - 2x)(-2 - 2x)$$

Corrigé de l'exercice 25

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 30$$

1) Développons l'expression $(2x + 6)(x - 5)$ pour vérifier qu'elle est égale à $f(x)$:

$$\begin{aligned}(2x + 6)(x - 5) &= 2x \cdot x + 2x \cdot (-5) + 6 \cdot x + 6 \cdot (-5) \\ &= 2x^2 - 10x + 6x - 30 \\ &= 2x^2 - 4x - 30\end{aligned}$$

Nous constatons que cette expression est égale à $f(x)$. Donc,

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 30 = (2x + 6)(x - 5)$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$f(x) = (2x + 6)(x - 5)$$

2) Commençons par développer l'expression $(2x + 2)(x - 3)$:

$$\begin{aligned}(2x + 2)(x - 3) &= 2x(x - 3) + 2(x - 3) \\ &= 2x^2 - 6x + 2x - 6 \\ &= 2x^2 - 4x - 6\end{aligned}$$

Maintenant, considérons $(2x + 2)(x - 3) - 24$:

$$\begin{aligned}(2x + 2)(x - 3) - 24 &= 2x^2 - 4x - 6 - 24 \\ &= 2x^2 - 4x - 30\end{aligned}$$

Nous constatons que cette expression est équivalente à $f(x)$. Donc,

$$f(x) = (2x + 2)(x - 3) - 24$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$f(x) = (2x + 2)(x - 3) - 24$$

Corrigé de l'exercice 26

Développons les deux expressions dans A pour vérifier l'affirmation :

$$A = (x + 3)(2x + 1) - x(2x + 7)$$

Calculons $(x + 3)(2x + 1)$:

$$(x + 3)(2x + 1) = x(2x + 1) + 3(2x + 1) = 2x^2 + x + 6x + 3 = 2x^2 + 7x + 3$$

Calculons $x(2x + 7)$:

$$x(2x + 7) = 2x^2 + 7x$$

Soustrayons ces deux résultats :

$$A = (2x^2 + 7x + 3) - (2x^2 + 7x) = 2x^2 + 7x + 3 - 2x^2 - 7x = 3$$

Ainsi, nous avons vérifié que :

$$A = 3$$

Nous avons montré que, quel que soit le nombre x , la valeur de A est toujours égale à 3. L'élève a donc raison. Développons les expressions C et D pour vérifier s'ils sont égaux pour tous les réels x :

$$C = (2x + 6)(x - 4)$$

Développons $(2x + 6)(x - 4)$:

$$(2x + 6)(x - 4) = 2x(x - 4) + 6(x - 4) = 2x^2 - 8x + 6x - 24 = 2x^2 - 2x - 24$$

Développons maintenant $D = x(2x - 2) - 24$:

$$D = x(2x - 2) - 24 = 2x^2 - 2x - 24$$

Nous constatons que les deux expressions sont égales :

$$C = 2x^2 - 2x - 24$$

$$D = 2x^2 - 2x - 24$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$C = D$$

pour tous les réels x .

Corrigé de l'exercice 27

1. $D = (a + 5)^2 - (a - 5)^2 = 20a$.
2. Avec $a = 10000$, on obtient $D = 200000$.

Corrigé de l'exercice 28

- 1) développer l'expression.
- 2) a) canonique : $3(3 - 3)^2 + 5 = 5$
b) développer : $3(\sqrt{2})^2 - 18\sqrt{2} + 32 = 38 - 18\sqrt{2}$
c) développer : $0^2 - 18 \times 0 + 32 = 32$

Corrigé de l'exercice 29

- 1) L'aire d'un carré est donnée par côté².
 $A = (2x + 1)^2$
 $= (2x + 1)(2x + 1)$
 $= 4x^2 + 4x + 1$.
- 2) On utilise le théorème de Pythagore :
 $BC^2 = AB^2 + AC^2$
 $= (x + 1)^2 + (x + 2)^2$
 $= (x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 4x + 4)$
 $= x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4$
 $= 2x^2 + 6x + 5$.

3) On a :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (x+5)^2 + (2x+2)^2 \\ &= x^2 + 10x + 25 + 4x^2 + 8x + 4 \\ &= 5x^2 + 18x + 29. \end{aligned}$$

$$BC^2 = 5x^2 + 16x + 31.$$

L'équation $5x^2 + 18x + 29 = 5x^2 + 16x + 31$ est équivalente à $2x - 2 = 0$ qui a pour solution $x = 1$.

Il existe une valeur de x pour laquelle ABC est rectangle en A : $x = 1$.

4) On note A_1 l'aire du carré initial et A_2 celle du nouveau carré.

$$\begin{aligned} A_1 &= x^2 \\ A_2 &= (x+2)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 \\ \Delta A &= A_2 - A_1 \\ &= (x^2 + 4x + 4) - x^2 \\ &= 4x + 4. \end{aligned}$$

L'affirmation de l'élève est que l'augmentation est $4x$.

En réalité, l'augmentation est $4x + 4$, donc l'élève n'a pas raison.

5) On note A_1 l'aire du carré initial et A_2 celle du carré agrandi.

$$\begin{aligned} A_1 &= x^2 \\ A_2 &= (x+1)^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 \\ A_2 - A_1 &= (x^2 + 2x + 1) - x^2 \\ &= 2x + 1 \\ 2x + 1 &= 5 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 30

1) • A avec $a = 1$ et $b = 5$.

$$(a+b)^2 = (1+5)^2 = 6^2 = 36, \text{ donc } A = 36.$$

$$(a-b)^2 = (1-5)^2 = (-4)^2 = 16, \text{ donc } B = 16.$$

$$A - B = 36 - 16 = 20.$$

$$\frac{1}{4} \times 20 = 5.$$

2) • Avec $a = -2$ et $b = -3$, on obtient :

$$(a+b)^2 = (-2+(-3))^2 = (-5)^2 = 25, \text{ donc } A = 25.$$

$$(a-b)^2 = (-2-(-3))^2 = 1^2 = 1, \text{ donc } B = 1.$$

$$A - B = 25 - 1 = 24.$$

$$\frac{1}{4} \times 24 = 6.$$

3) Pour démontrer cette conjecture, on utilise un calcul littéral.

On note les deux nombres choisis a et b . On obtient :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ donc } A = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \text{ donc } B = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$\begin{aligned} A - B &= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2} \\ &= 4ab \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \times 4ab = ab.$$

On vient de prouver que le résultat final est bien le produit des deux nombres de départ.

Corrigé de l'exercice 31

On traduit les données de l'énoncé :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= z^2, \\(x + y)^2 &= 41, \\(x - y)^2 &= 9.\end{aligned}$$

Nous devons trouver la valeur de z .

Tout d'abord, développons les deux équations fournies :

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= 41 \\x^2 + 2xy + y^2 &= 41, \\(x - y)^2 &= 9 \\x^2 - 2xy + y^2 &= 9.\end{aligned}$$

Nous avons donc le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2xy &= 41, \\x^2 + y^2 - 2xy &= 9.\end{aligned}$$

Pour trouver $x^2 + y^2$ et xy , additionnons et soustrayons ces deux équations :

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + 2xy) + (x^2 + y^2 - 2xy) &= 41 + 9 \\2(x^2 + y^2) &= 50 \\x^2 + y^2 &= 25,\end{aligned}$$

et maintenant, soustrayons les équations :

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + 2xy) - (x^2 + y^2 - 2xy) &= 41 - 9 \\4xy &= 32 \\xy &= 8.\end{aligned}$$

Maintenant, nous savons que $x^2 + y^2 = 25$ et $xy = 8$.

Revenons à notre première équation :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= z^2 \\25 &= z^2 \\z &= \sqrt{25} \\z &= 5.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 32

1) Pour justifier l'égalité, on commence par le membre de gauche afin d'obtenir le membre de droite.

$$\begin{aligned}\frac{3}{4n} + \frac{1}{3n} + \frac{5}{12n} &= \frac{3 \times 3}{4n \times 3} + \frac{1 \times 4}{3n \times 4} + \frac{5}{12n} \\&= \frac{9}{12n} + \frac{4}{12n} + \frac{5}{12n} \\&= \frac{17}{12n}\end{aligned}$$

2) On identifie $\frac{3}{2n}$ à $\frac{3}{14}$. On obtient $n = 7$.

$$\text{Avec } n = 7, \text{ on a : } \frac{3}{14} = \frac{3}{28} + \frac{1}{21} + \frac{5}{84}.$$

Corrigé de l'exercice 33

1) On exprime V en fonction de d et de k .

$$\begin{aligned}d &= k \times V^2 \\V^2 &= \frac{d}{k} \\V &= \sqrt{\frac{d}{k}}.\end{aligned}$$

2) On a :

$$d = 15 \text{ m}, \quad k = 0,14 \text{ (sur route mouillée)}$$

$$\begin{aligned}V &= \sqrt{\frac{d}{k}} \\V &= \sqrt{\frac{15}{0,14}} \\V &\approx \sqrt{107,14} \\V &\approx 10,35 \text{ m/s.}\end{aligned}$$

Pour convertir V de m/s en km/h :

$$V_{\text{km/h}} = V \times 3,6$$

$$V_{\text{km/h}} \approx 10,35 \times 3,6$$

$$V_{\text{km/h}} \approx 37,26.$$

Donc, la vitesse du véhicule est environ : $\boxed{37 \text{ km/h}}$

Corrigé de l'exercice 34

1) a) Choisissons le nombre 5.

$$1. \quad 5 \times 4 = 20$$

$$2. \quad 5 - 2 = 3$$

$$3. \quad 3^2 = 9$$

$$4. \quad 20 + 9 = 29$$

b) Choisissons le nombre 5.

$$1. \quad 5^2 = 25$$

$$2. \quad 25 + 6 = 31$$

Le résultat est donc 31.

2) Notons le nombre choisi x .

$$1. \quad x \times 4 = 4x$$

$$2. \quad 4x + (x - 2)^2$$

$$3. \quad 4x + x^2 - 4x + 4$$

$$4. \quad x^2 + 4$$

3) Notons le nombre choisi x .

$$1. \quad (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

Le résultat est donc $x^2 - 4x + 4$

4) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier les réponses et écrire les étapes des éventuels calculs :

a) Choisissons le nombre $\frac{2}{3}$.

$$1. \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$2. \quad \frac{4}{9} + 6 = \frac{4}{9} + \frac{54}{9} = \frac{58}{9}$$

L'affirmation est donc vraie.

b) Prenons un contre exemple : $n = 2$.

$$1. \quad n^2 = 4$$

$$2. \quad 4 + 6 = 10 \text{ est un entier pair}$$

L'affirmation est donc fausse.

c) Le résultat du programme B est $(x - 2)^2$. Un carré est toujours positif.

L'affirmation est donc vraie.

d) Pour un nombre entier x , les résultats des programmes A et B sont respectivement $x^2 - 4x + 4$ et $x^2 + 4$.

• Si x est pair, alors il existe un entier p tel que $x = 2p$

$$x^2 - 4x + 44p^2 - 8p + 4 = 4(p^2 - 2p + 1) = 4(p - 1)^2 \text{ qui est pair.}$$

De même que $x^2 + 4 = 4p^2 + 4 = 4(p^2 + 1)$. Les deux résultats sont donc pairs.

- Si x est impair, alors il existe un entier p tel que $x = 2p + 1$

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 4 &= (2p + 1)^2 - 4(2p + 1) + 4 \\ &= 4p^2 + 4p + 1 - 8p - 4 + 4 \\ &= 4p^2 - 4p + 1 \\ &= 4(p^2 - p) + 1\end{aligned}$$

qui est impair.
De même que

$$\begin{aligned}x^2 + 4 &= (2p + 1)^2 + 4 \\ &= 4p^2 + 4p + 5 \\ &= 4(p^2 - p + 1) + 1\end{aligned}$$

qui est impair.
les deux résultats sont donc impairs.
 x a donc la même parité que les deux programmes.
L'affirmation est vraie.

Corrigé de l'exercice 35

1) On a :

Nombre de départ $n = 3$.
L'entier juste après $n + 1 = 4$.
L'entier juste avant $n - 1 = 2$.
Carré de l'entier juste après $(n + 1)^2 = 4^2 = 16$.
Carré de l'entier juste avant $(n - 1)^2 = 2^2 = 4$.
Différence des carrés $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 16 - 4 = 12$.
Retrancher 3 fois le nombre de départ à cette différence
 $12 - 3 \times 3 = 12 - 9 = 3$.
Le résultat final est 3.

2) On a :

Nombre de départ $n = 10$.
L'entier juste après $n + 1 = 11$.
L'entier juste avant $n - 1 = 9$.
Carré de l'entier juste après $(n + 1)^2 = 11^2 = 121$.
Carré de l'entier juste avant $(n - 1)^2 = 9^2 = 81$.
Différence des carrés $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 121 - 81 = 40$.
Retrancher 3 fois le nombre de départ à cette différence
 $40 - 3 \times 10 = 40 - 30 = 10$.
Le résultat final est 10.

3) Conjecture : Le résultat final est toujours égal au nombre de départ.

Prouvons cette conjecture en utilisant un nombre entier n quelconque :

Nombre de départ n .
L'entier juste après $n + 1$.
L'entier juste avant $n - 1$.
Carré de l'entier juste après $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.
Carré de l'entier juste avant $(n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1$.
Différence des carrés
 $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = (n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1)$
 $= n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1$
 $= 4n$.
Retrancher 3 fois le nombre de départ à cette différence
 $4n - 3n = n$.
Le résultat final est n .

Donc, le résultat final est toujours égal au nombre de départ, ce qui confirme notre conjecture.