Chapitre 9

Variations et extremums

Les savoir-faire

070. Faire le lien entre la représentation graphique et le tableau de variations.

071. Utiliser un tableau de variations.

072. Déterminer les extremums d'une fonction.

073. Connaître et utiliser les variations des fonctions de référence.

I. Variations d'une fonction

1. Fonction croissante

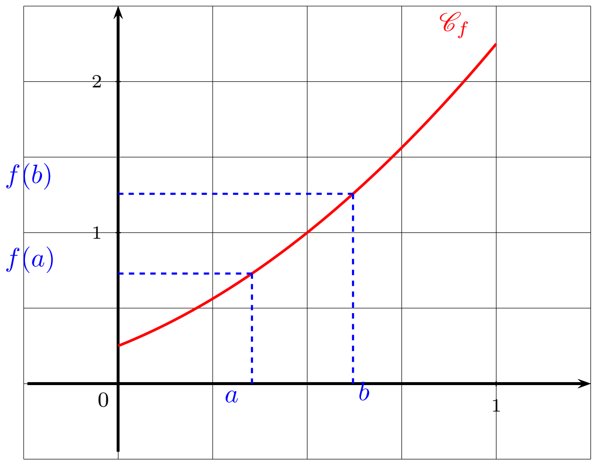
Définition : fonction croissante

On dit qu'une fonction f est croissante sur un intervalle, si et seulement si, **pour tous** nombres réels a et b appartenant à cet intervalle on a :

$$\boxed{\text{Si } a < b \text{ alors } f(a) \leqslant f(b)}$$

Si on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f, $\mathscr{C}_f$ « monte ».

On dit qu'une fonction croissante **conserve l'ordre**, c'est-à-dire que les nombres et leurs images sont rangés dans le même ordre.



f est croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

2. Fonction décroissante

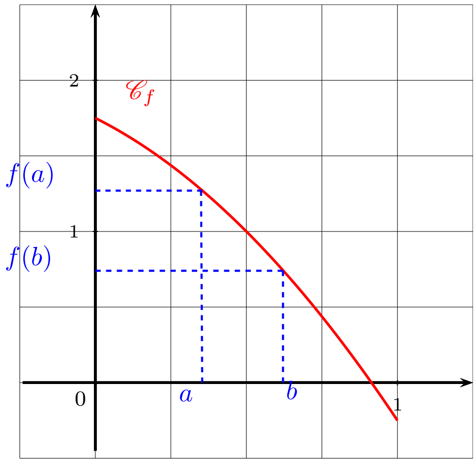
Définition : fonction décroissante

On dit qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle, si et seulement si, **pour tous** nombres réels a et b appartenant à cet intervalle on a :

$$\boxed{\text{Si } a < b \text{ alors } f(a) \geqslant f(b)}$$

Si on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f, $\mathscr{C}_f$ « descend ».

On dit qu'une fonction décroissante **change l'ordre**, c'est-à-dire que les nombres et leurs images sont rangés dans un ordre inverse.



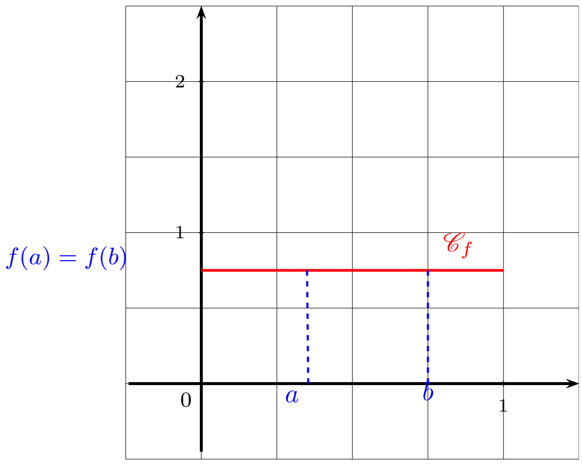
f est décroissante sur $[0\ ;\ 1]$.

3. Fonction constante

Définition : fonction constante

On dit qu'une fonction f est constante sur un intervalle, si et seulement si, **pour tous** nombres réels a et b appartenant à cet intervalle on a :

$$\boxed{\text{Si } a < b \text{ alors } f(a) = f(b)}$$

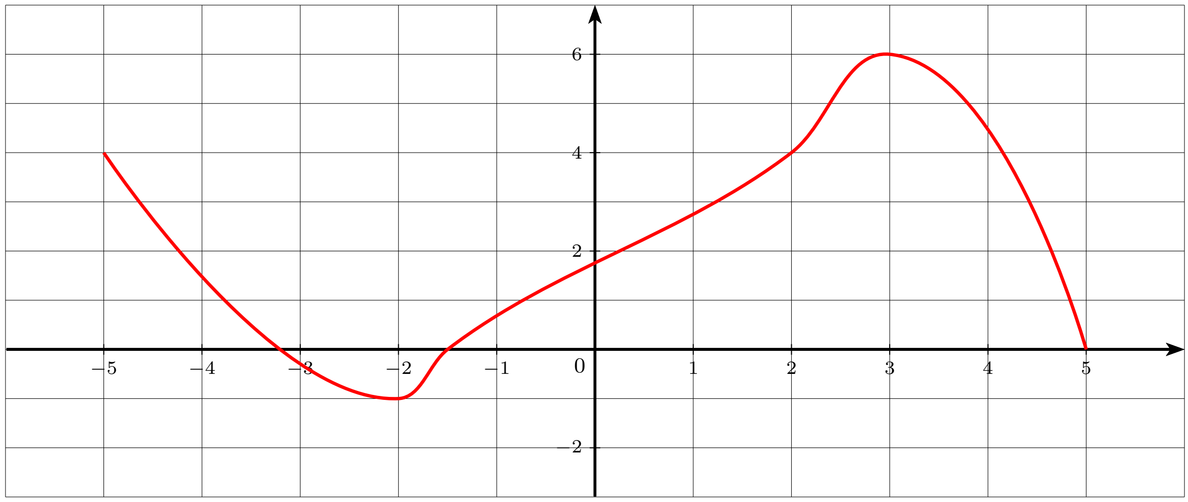


f est constante sur $[0\ ;\ 1]$

Remarques :

- Si l'inégalité $a < b$ implique l'inégalité stricte $f(a) < f(b)$, on dit que la fonction f est **strictement croissante sur l'intervalle**.
- Si l'inégalité $a < b$ implique l'inégalité stricte $f(a) > f(b)$, on dit que la fonction f est **strictement décroissante sur l'intervalle**.
- On dit qu'une fonction f est **monotone** sur un intervalle si elle est soit croissante, soit décroissante sur cet intervalle.
- Un tableau de variation **est un tableau qui résume de façon schématique les variations de la fonction.**

4. Tableau de variations



antécédents

f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-5\ ;\ -2]$

x	-5		-2		3		5
$f(x)$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	6	$\searrow$	0

images

f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$

II. Variations de fonctions de référence

1. Les fonctions affines

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

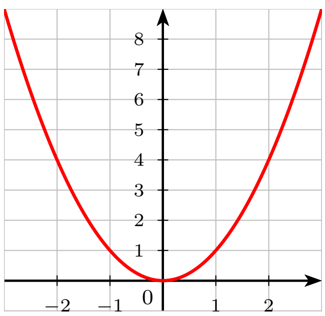
• Si $m > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
• Si $m < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
• Si $m = 0$ alors f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction carré

Vidéo

• La fonction carré est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$;
• La fonction carré est décroissante sur sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	



Exemple :
On a représenté graphiquement la fonction carré f dans un repère.
1. Comparer graphiquement $f(0,5)$ et $f(1,5)$. Même question avec $f(-1,5)$ et $f(-1)$.
2. Vérifier par calcul le résultat de la question **1.** Vidéo

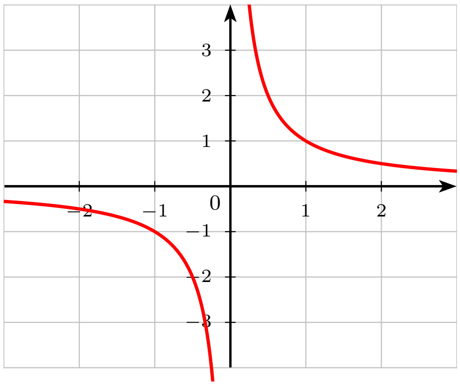
3. La fonction inverse

Vidéo

• La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

• La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

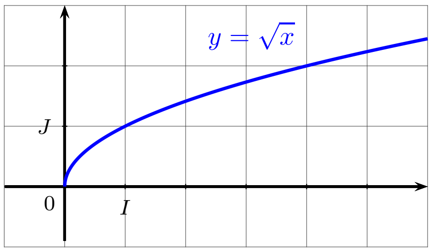


4. La fonction racine carrée

Vidéo

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗

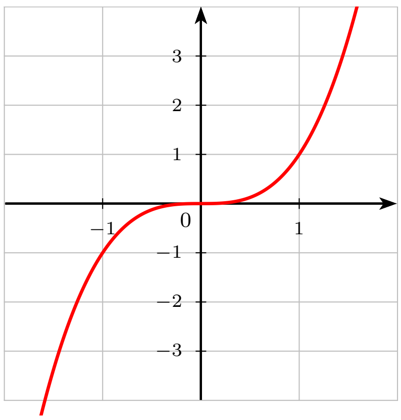


5. La fonction cube

Vidéo

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	↗	

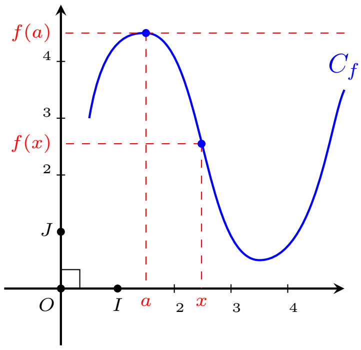


III. Extrema

1. Maximum

Définition : maximum

Dire que la fonction f admet un maximum en a sur un intervalle signifie que, pour tout nombre réel x appartenant à cet intervalle on a $f(x) \leqslant f(a)$.
Le maximum de f sur cet intervalle est alors égal à $\boldsymbol{f(a)}$. Il est atteint en $x = a$.

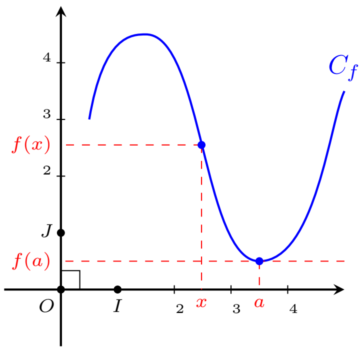


$f(a)$ est la plus grande valeur de la fonction f sur l'intervalle. C'est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe C_f.

2. Minimum

Définition : minimum

Dire que la fonction f admet un minimum en a sur un intervalle signifie que, pour tout nombre réel x appartenant à cet intervalle on a $f(x) \geqslant f(a)$.
Le minimum de f sur cet intervalle est alors égal à $\boldsymbol{f(a)}$. Il est atteint en $x = a$.



$f(a)$ est la plus petite valeur de la fonction f sur l'intervalle. C'est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe C_f.

Remarques :

- Lorsque le maximum (ou minimum) existe, celui-ci est unique ; cependant, il peut être atteint pour plusieurs valeurs de x.
- Maximum et minimum constituent les **extrema** de la fonction.