Ensemble de nombres - Intervalles (Correction) — Seconde

Corrigé de l'exercice 1

1) -11π est un nombre irrationnel. On a donc $-11\pi \in \mathbb{R}$.
2) $\dfrac{12}{4} = \dfrac{3 \times 4}{4} = 3$ est un entier naturel. On a donc $\dfrac{12}{4} \in \mathbb{N}$.
3) 56 est un entier naturel. On a donc $56 \in \mathbb{N}$.
4) $\sqrt{144} = 12$ est un entier naturel. On a donc $\sqrt{144} \in \mathbb{N}$.
5) $\dfrac{-89}{19}$ est une fraction d'entiers qui n'est pas égal à un nombre entier ou à un nombre décimal. On a donc $\dfrac{-89}{19} \in \mathbb{Q}$.
6) -83 est un entier relatif. On a donc $-83 \in \mathbb{Z}$.
7) $\dfrac{-47}{4} = -11{,}75$ est un nombre décimal. On a donc $\dfrac{-47}{4} \in \mathbb{D}$.
8) $-\sqrt{90}$ est un nombre irrationnel car 90 n'est pas le carré d'un nombre entier, décimal ou fractionnaire. On a donc $-\sqrt{90} \in \mathbb{R}$.
9) $-5{,}09$ est un nombre décimal. On a donc $-5{,}09 \in \mathbb{D}$.

Corrigé de l'exercice 2

$A = \dfrac{1}{2} = 0,5 \in \mathbb{D}$. De plus $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

$B = \sqrt{7-6} = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{N}$

$C = \dfrac{10-4}{3} = 2 \in \mathbb{N}$

$D = -\sqrt{16} = -4 \in \mathbb{Z}$. De plus $-4 < 0$ donc $-4 \notin \mathbb{N}$

$E = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} + \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} = 1 \in \mathbb{N}$

$F = \sqrt{16} - \sqrt{25} = 4 - 5 = -1 \in \mathbb{Z}$. De plus $-1 \notin \mathbb{N}$

$G = \dfrac{91}{7} = 13 \in \mathbb{N}$

$H = \dfrac{34}{2} - \sqrt{289} = 0 \in \mathbb{N}$

Corrigé de l'exercice 3

1) $-1 \notin]-1;2[$
2) $-3,7 \notin [-5;-3,8]$
3) $4 \in [4;10]$
4) $-5 \in]-\infty;2[$
5) $6 \notin]-\infty;-2[$
6) $0 \notin [4;+\infty[$

Corrigé de l'exercice 4

1) $-2 < x \leqslant 3$
2) $x \geqslant -3$
3) $x < 2$
4) $-5 \leqslant x \leqslant 3$

Corrigé de l'exercice 5

1) 

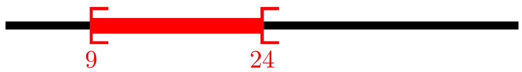
$I =]2;+\infty[$

2) 

$I = [10\ ;\ +\infty[$

3) 

$x < 8$

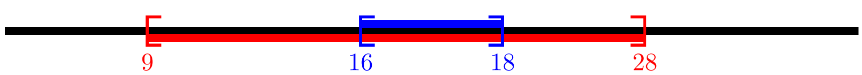
4) 

$I = [9\ ;\ 24[$

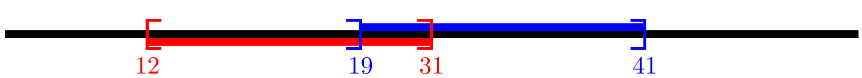
Corrigé de l'exercice 6

1) On cherche les réels qui sont dans $]7\ ;\ 32]$ ou bien $]21;22[$, ou dans les deux.
On regarde donc la partie de l'intervalle qui est coloriée, soit en bleu, soit en rouge, soit en bleu et rouge :
On a $]21\ ;\ 22] \subset]7;32]$ donc $I =]7\ ;\ 32]$.

2) On cherche les réels qui sont à la fois dans $[9\ ;\ 28]$ et dans $[16\ ;\ 18]$.
On regarde la partie de l'intervalle qui est coloriée à la fois en bleu et en rouge.
On observe que $[16\ ;\ 18] \subset [9\ ;\ 28]$ donc $I = [16\ ;\ 18]$.

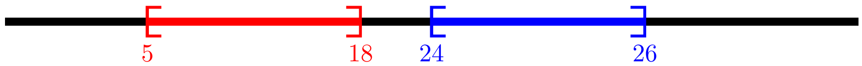


3) On cherche les réels qui sont dans $[12\ ;\ 31]$ou bien $]19\ ;\ 41]$, ou dans les deux.
On regarde donc la partie de l'intervalle qui est coloriée, soit en bleu, soit en rouge, soit en bleu et rouge :
$I = [12\ ;\ 41]$.



4) On cherche les réels qui sont dans $[5\ ;\ 18]$ ou bien $[24;26]$, ou dans les deux.
On regarde donc la partie de l'intervalle qui est coloriée, soit en bleu, soit en rouge, soit en bleu et rouge.

Les deux ensembles sont disjoints, ils n'ont aucun élément en commun.
On ne peut pas simplifier l'écriture de I qui s'écrit donc $I = [5\ ;\ 18] \cup [24\ ;\ 26]$.



Corrigé de l'exercice 7

Pour démontrer que l'affirmation de Raoul est fausse il suffit de trouver un contre-exemple.
$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ prouve que le produit de deux irrationnels peut être un entier.

Corrigé de l'exercice 8

$\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels et leur produit $\sqrt{10}$ l'est aussi.

Corrigé de l'exercice 9

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, donc $2\sqrt{2}$ est aussi un nombre irrationnel.
Or $\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4 \in \mathbb{N}$

Corrigé de l'exercice 10

1) Faux : 5 et 7 sont des nombres entiers naturels mais. $5 - 7 = -2$ n'est pas un nombre entier naturel.
2) Faux : $1 = \dfrac{1}{10^0}$ et $3 = \dfrac{3}{10^\mu}$ sont des nombres décimaux mais 3 n'est pas un nombre décimal.
3) Faux : $\sqrt{2}$ et 1 sont des nombres réels mais $\dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
4) Vrai : Soient $q \in \mathbb{Q}$ un nombre rationnel et $n \in \mathbb{Z}$ un nombre entier relatif.
Par définition, un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'une fraction où le numérateur et le dénominateur sont des entiers, avec un dénominateur non nul : $q = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Le produit de q par n est alors : $q \times n = \left(\frac{a}{b}\right) \times n$..
En multipliant, on obtient : $q \times n = \frac{a \times n}{b}$.
Le produit $a \times n$ est un entier car le produit de deux entiers est toujours un entier. Le dénominateur b reste un entier non nul. Donc, $\frac{a \times n}{b}$ est une fraction où le numérateur et le dénominateur sont des entiers, avec un dénominateur non nul.
Par conséquent, $\frac{a \times n}{b}$ est un nombre rationnel.
Ainsi, le produit d'un nombre rationnel par un nombre entier relatif est un nombre rationnel.

Corrigé de l'exercice 11

1) Vrai : si x est un entier naturel, alors son double $2x$ le sera aussi et de même pour $2x + 1$.
2) Vrai : on a vu dans la question précédente que $x \in \mathbb{N}$. Or. N $\in$ donc $x \in$.
3) Faux : si $x = 2$, on a $3x - 7 = -1$ qui n'est pas un entier naturel. Mais $3x - 7 \in \mathbb{Z}$.
4) Faux : si on prend $x = 1$ on a $\dfrac{x-6}{2} = -2,5$. Mais $\dfrac{x-6}{2} \in \mathbb{Q}$.
5) Faux : si on prend $x = 1$.
6) Faux : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Corrigé de l'exercice 12

1) $x = \dfrac{1}{2}$
2) $x = \sqrt{3}$
3) $x = -9$
4) Tous les rationnels sont des réels, donc aucune valeur de x convient.

Corrigé de l'exercice 13

1) a) On simplifie l'écriture de A :

$$\begin{aligned}\text{A} &= \frac{-1}{3}+\frac{x}{6}+\frac{9}{2}\\ &= \frac{-2}{6}+\frac{x}{6}+\frac{27}{6}\\ &= \frac{-2+x+27}{6}\\ &= \frac{x+25}{6}\end{aligned}$$

Pour que $\text{A} \in \mathbb{N}$, il faut que $\frac{x+25}{6}$ soit un entier naturel, ce qui signifie que $x+25$ doit être divisible par 6.

Pour $x=5$, on a $x+25=5+25=30$, qui est divisible par 6.

Donc, $\frac{30}{6}=5 \in \mathbb{N}$.

Ainsi, un nombre $x \in \mathbb{N}$ tel que $\text{A} \in \mathbb{N}$ est $x=5$.

b) $\text{A}=\frac{x+25}{6}$.

Pour $x=1$, on a $\text{A}=\frac{1+25}{6}=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}$.

$\frac{13}{3}$ est un nombre rationnel qui n'est pas un nombre décimal.

Ainsi, un nombre $x \in \mathbb{Z}$ tel que $\text{A} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$ est $x=1$.

2) a) $\text{B}=0{,}25-\frac{\sqrt{x+2}}{2}$

Avec $x=2$, on a $\text{B}=0{,}25-\frac{\sqrt{2+2}}{2}=0{,}25-\frac{\sqrt{4}}{2}=0{,}25-\frac{2}{2}=0{,}25-1=-0{,}75$, qui est un nombre décimal.

Ainsi, un nombre $x \in \mathbb{Z}$ tel que $\text{B} \in \mathbb{D}$ est $x=2$.

b) $\text{B}=0{,}25-\frac{\sqrt{x+2}}{2}$

Avec $x=6$, on a $\text{B}=0{,}25-\frac{\sqrt{6+2}}{2}=0{,}25-\frac{\sqrt{8}}{2}=0{,}25-\frac{2\sqrt{2}}{2}=0{,}25-\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ est irrationnel, donc $0{,}25-\sqrt{2}$ est aussi irrationnel.

Ainsi, un nombre $x \in \mathbb{Z}$ tel que $\text{B} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est $x=6$.

Corrigé de l'exercice 14

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\\ &= \left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2+\sqrt{\frac{a}{c}}\times\sqrt{\frac{c}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\times\sqrt{\frac{a}{c}}+\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2\\ &= \frac{a}{c}+\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}\times\frac{a}{c}}+\frac{c}{a}\\ &= \frac{a}{c}+\sqrt{1}+\sqrt{1}+\frac{c}{a}\\ &= \frac{a^2}{ac}+\frac{2ac}{ac}+\frac{c^2}{ac}\\ &= \frac{a^2+2ac+c^2}{ac}\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\left(\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2$ est un rationnel.