Parcours d'exercices

Équations

2

CALCUL LITTERAL

Parcours 1

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19 – 20 – 21 – 22 – 23 – 24 – 25 – 26

Parcours 2

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19 – 20 – 21 – 22 – 23 – 24 – 25 – 26

Parcours 3

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19 – 20 – 21 – 22 – 23 – 24 – 25 – 26

1 Pour s'échauffer

Jour 1 : .../10

Jour 2 : .../10

Jour 3 : .../10

2 Pour s'entraîner

Exercice 1

Justifier si les nombres proposés sont des solutions de l'équation donnée ou non.

$120x - 240 = 20x^2 - 40x$ pour $x = 4$, pour $x = 2$ puis pour $x = 6$.

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes.

1) $11a + 4 = 0$

2) $13x + 4 = 0$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes.

1) $5t + 6 = -3t + 11$

2) $2y + 1 = 10y - 9$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes.

1) $2 - (2x + 5) = 8x + 8$

2) $5(3x + 1) = 8x - 7$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes.

1) $\frac{8}{9} = \frac{2}{x}$

2) $\frac{z}{4} = \frac{2}{5}$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $(-7x-5)(4x+9)=0$

2) $(-4x-3)(-9x+9)=0$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(-5x-\frac{3}{7}\right)=0$

2) $\left(\frac{1}{7}x+6\right)\left(\frac{-4}{7}x+4\right)=0$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $x^2-64=0$

2) $x^2=11$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $(2x+9)(-4x-9)+(2x+9)(5x+8)=0$

2) $(3x-9)(x-7)-(3x-9)(-6x-9)=0$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 10

1) Préciser les valeurs interdites éventuelles, puis résoudre l'équation : $\dfrac{2x-2}{-x+4}=0$.

2) Préciser les valeurs interdites éventuelles, puis résoudre l'équation : $\dfrac{x^2-1}{8x-16}=0$.

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 11

1) Préciser les valeurs interdites éventuelles, puis résoudre l'équation : $\dfrac{-3-3x}{9x}=-8$.

2) Préciser les valeurs interdites éventuelles, puis résoudre l'équation : $\dfrac{2}{8x-3}=\dfrac{7}{-4x-1}$.

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

3 Pour chercher

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2+10x+16. \quad (\textit{Forme développée})$$

1) Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire :

$$f(x)=(x+8)(x+2). \quad (\textit{Forme factorisée})$$

2) Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire :

$$f(x)=(x+5)^2-9. \quad (\textit{Forme canonique})$$

3) Répondre aux questions suivantes en utilisant l'écriture de $f(x)$ la mieux adaptée :

   a) Calculer $f(0)$, $f(-8)$ puis $f(-5)$.

   b) Résoudre l'équation $f(x)=16$.

   c) Résoudre l'équation $f(x)=-9$.

   d) Résoudre l'équation $f(x)=0$.

MathALÉA

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-3\,(x-5)^2+48. \quad (\textit{Forme canonique})$$

1) Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire :

$$f(x)=-3x^2+30x-27. \quad (\textit{Forme développée})$$

2) Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire :

$$f(x)=-3(x-9)(x-1). \quad (\textit{Forme factorisée})$$

3) Répondre aux questions suivantes en utilisant l'écriture de $f(x)$ la mieux adaptée :

   a) Calculer $f(0)$, $f(1)$ puis $f(5)$.

   b) Résoudre l'équation $f(x)=0$.

   c) Résoudre l'équation $f(x)=-27$.

   d) Résoudre l'équation $f(x)=48$.

MathALÉA

Exercice 14

Une société de location de véhicules propose deux tarifs :

• Tarif A : un forfait de 22 € et 0,35 € par km parcouru ;

• Tarif B : un forfait de 37 € et 0,16 € par km parcouru.

Pour combien de km (arrondi à l'unité), les deux tarifs sont-ils égaux ?

MathALÉA

Exercice 15

Un triangle ABC est rectangle en A. On a $AB = 4$ cm et $AC = x$ cm.

Sachant que le carré de son hypoténuse est 57, déterminer la valeur exacte de x.

MathALÉA

Exercice 16

1) Comment choisir la mesure du côté d'un carré, si en augmentant la longueur du côté de 5, on obtient un autre carré dont l'aire vaut quatre fois celle du carré initial ?
2) Démontrer qu'il n'existe aucun entier relatif n dont le carré soit égal au double du produit des entiers qui l'encadrent.
3) Soit $ABCD$ un carré dont la mesure du côté est x. En augmentant la longueur du côté $[AB]$ de 8 et la longueur du côté $[AD]$ de 5, on obtient un rectangle dont l'aire surpasse celle du carré initial de 183.
   Quelle est la mesure x du côté du carré ?

Exercice 17

1) Résoudre l'équation :
   $1710 + \dfrac{9}{100}\,x = 900 + \dfrac{1}{10}\,x$.
2) Un père lègue son argent à ses enfants de la façon suivante :
   - à l'aîné, 1000 € et un dixième du reste
   - au deuxième, 2000 € et un dixième du reste
   - au troisième, 3000 € et un dixième du reste
   - et ainsi de suite ...

   A la fin du partage, chaque enfant reçoit la même somme.

   On note x la somme totale.

   a) Exprimer en fonction de x, la somme que reçoit l'aîné.
   b) Montrer que la somme que reçoit le deuxième est : $1710 + \dfrac{9}{100}x$
   c) En déduire la valeur de x.
   d) Combien y a-t-il d'enfants ?

Exercice 18

On considère l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ d'inconnue le nombre réel x.

1) Déterminer les nombres a et b tels que, pour tout réel x :

$$x^2 - x - 2 = (x + a)^2 + b.$$

2) En déduire les solutions de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$.

Exercice 19

On considère l'équation (E) : $\dfrac{2x^2 - 3}{5} = x$ d'inconnue le nombre réel x.

1) Calculer $\dfrac{2 \times 3^2 - 3}{5}$. Que peut-on en déduire pour l'équation (E) ?
2) a) Développer $(x - 3)(2x + 1)$.
   b) Expliquer pourquoi, résoudre l'équation $\dfrac{2x^2 - 3}{5} = x$ revient à résoudre l'équation $(x - 3)(2x + 1) = 0$.
3) Déterminer les solutions de (E).

MathGM

Exercice 20

On considère l'équation (E) : $\dfrac{105 - 6x}{3} = x^2$ d'inconnue le nombre réel x.

1) a) Calculer $\dfrac{105 - 6 \times (-7)}{3}$ puis $(-7)^2$.
   b) Que peut-on en déduire pour l'équation ?
2) a) Développer $(3x - 15)(x + 7)$.
   b) Expliquer pourquoi, résoudre l'équation $\dfrac{105 - 6x}{3} = x^2$ revient à résoudre l'équation $(3x - 15)(x + 7) = 0$.
3) Déterminer les solutions de (E).

MathGM

Exercice 21

Une boulangère très joueuse demande à Louise de résoudre l'énigme suivante pour trouver le prix d'une baguette de pain :

« La moitié du prix de la baguette augmenté de 0,70 € est égale au double du prix de la baguette diminué de 0,65 € ».

Comment Louise doit-elle s'y prendre pour retrouver le prix de la baguette ?

MathGM

Exercice 22

Soustraire 3 à un nombre ou le diviser par 3 donne le même résultat.

Quel est ce nombre ? Justifier votre réponse.

DNB

Exercice 23

On donne l'expression $E = (3x + 8)^2 - 64$.

1) Développer E.
2) Montrer que E peut s'écrire sous forme factorisée : $3x(3x + 16)$.
3) Résoudre l'équation $(3x + 8)^2 - 64 = 0$.

Exercice 24

On considère l'équation **(E)** : $x^2 + 2x + m = 0$.
L'objectif de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de m l'équation **(E)** admet au moins une solution.

1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes.
   a) $x^2 + 2x = 0$
   b) $x^2 + 2x + 1 = 0$
2) a) Vérifier que pour tout réel x :
$$x^2 + 2x + m = (x+1)^2 - 1 + m.$$
   b) Justifier alors que résoudre **(E)** revient à résoudre l'équation $(x+1)^2 = 1 - m$.
   c) Conclure.

sésamath

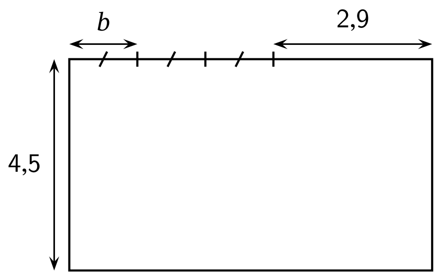
Exercice 25

Louis a ramassé 30 coquillages.
Les grands mesurent 2 cm de long, les petits mesurent 1,5 cm.
Tous les coquillages mis bout à bout font 54 cm au total.
Combien a-t-il de grands coquillages et combien de petits ?

D'après DNB

Exercice 26

On désigne par b un nombre positif.
Déterminer la valeur de b telle que le périmètre du rectangle ci-contre soit égal à 25.



DNB

4 Pour s'évaluer

Temps : 30 minutes

Essai 1 : .../10

Essai 2 : .../10

5 Les documents en pdf

Le parcours

Les indices

Les réponses

Les corrigés

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

Pour $x = 4$:
$120x - 240 = 120 \times 4 - 240 = 240$
$20x^2 - 40x = 20 \times 4^2 - 40 \times 4 = 320 - 160 = 160$
$240 \neq 160$ donc l'égalité n'est pas vraie.
$x = 4$ n'est donc pas solution de l'équation $120x - 240 = 20x^2 - 40x$

Pour $x = 2$:
$120x - 240 = 120 \times 2 - 240 = 0$
$20x^2 - 40x = 20 \times 2^2 - 40 \times 2 = 80 - 80 = 0$
On trouve le même résultat pour le membre de gauche et pour le membre de droite donc l'égalité est vraie.
$x = 2$ est donc solution de l'équation $120x - 240 = 20x^2 - 40x$

Pour $x = 6$:
$120x - 240 = 120 \times 6 - 240 = 480$
$20x^2 - 40x = 20 \times 6^2 - 40 \times 6 = 720 - 240 = 480$
On trouve le même résultat pour le membre de gauche et pour le membre de droite donc l'égalité est vraie.
$x = 6$ est donc solution de l'équation $120x - 240 = 20x^2 - 40x$

Corrigé de l'exercice 2

1) $11a + 4 = 0$
On soustrait 4 aux deux membres.
$11a + 4 - 4 = 0 - 4$
$11a = -4$
On divise les deux membres par 11.
$11a \div 11 = -4 \div 11$
$a = -\dfrac{4}{11}$
La solution de l'équation $11a + 4 = 0$ est $-\dfrac{4}{11}$.

2) $13x + 4 = 0$
On soustrait 4 aux deux membres.
$13x + 4 - 4 = 0 - 4$
$13x = -4$
On divise les deux membres par 13.
$13x \div 13 = -4 \div 13$
$x = -\dfrac{4}{13}$
La solution de l'équation $13x + 4 = 0$ est $-\dfrac{4}{13}$.

Corrigé de l'exercice 3

1) $5t + 6 = -3t + 11$
On ajoute $3t$ aux deux membres.
$5t + 6 + 3t = -3t + 11 + 3t$
$8t + 6 = 11$
On soustrait 6 aux deux membres.
$8t + 6 - 6 = 11 - 6$
$8t = 5$
On divise les deux membres par 8.
$8t \div 8 = 5 \div 8$
$t = \dfrac{5}{8}$
La solution de l'équation $5t + 6 = -3t + 11$ est $\dfrac{5}{8}$.

2) $2y+1=10y-9$

On soustrait $10y$ aux deux membres.

$2y+1-10y=10y-9-10y$

$-8y+1=-9$

On soustrait 1 aux deux membres.

$-8y+1-1=-9-1$

$-8y=-10$

On divise les deux membres par -8.

$-8y\div(-8)=-10\div(-8)$

$y=\dfrac{10}{8}$

$y=\dfrac{5}{4}$

La solution de l'équation $2y+1=10y-9$ est $\dfrac{5}{4}$.

Corrigé de l'exercice 4

1) $2-(2x+5)=8x+8$

On développe le membre de gauche.

$2-2x-5=8x+8$

$-2x-3=8x+8$

On soustrait $8x$ aux deux membres.

$-2x-3-8x=8x+8-8x$

$-10x-3=8$

On ajoute 3 aux deux membres.

$-10x-3+3=8+3$

$-10x=11$

On divise les deux membres par -10.

$-10x\div(-10)=11\div(-10)$

$x=\dfrac{11}{-10}$

$x=-\dfrac{11}{10}$

La solution est $-\dfrac{11}{10}$.

2) $5(3x+1)=8x-7$

On développe le membre de gauche.

$15x+5=8x-7$

On soustrait $8x$ aux deux membres.

$15x+5-8x=8x-7-8x$

$7x+5=-7$

On soustrait 5 aux deux membres.

$7x+5-5=-7-5$

$7x=-12$

On divise les deux membres par 7.

$7x\div7=-12\div7$

$x=\dfrac{-12}{7}$

La solution est $-\dfrac{12}{7}$.

Corrigé de l'exercice 5

1) $\dfrac{8}{9}=\dfrac{2}{x}$

Les produits en croix sont égaux.

$8\times x=9\times 2$

On divise les deux membres par 8.

$\dfrac{8\times x}{8}=\dfrac{9\times 2}{8}$

On simplifie et on calcule.

$x=2{,}25$

2) $\dfrac{z}{4} = \dfrac{2}{5}$

Les produits en croix sont égaux.

$5 \times z = 2 \times 4$

On divise les deux membres par 5.

$\dfrac{5 \times z}{5} = \dfrac{2 \times 4}{5}$

On simplifie et on calcule.

$z = 1{,}6$

Corrigé de l'exercice 6

1) On reconnaît une équation produit-nul, donc on applique la propriété :

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$(-7x - 5)(4x + 9) = 0$

$\iff -7x - 5 = 0$ ou $4x + 9 = 0$

$\iff -7x = 5$ ou $4x = -9$

$\iff x = \dfrac{5}{-7}$ ou $x = \dfrac{-9}{4}$

On en déduit : $S = \left\{-\dfrac{9}{4}; -\dfrac{5}{7}\right\}$

2) On reconnaît une équation produit-nul, donc on applique la propriété :

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$(-4x - 3)(-9x + 9) = 0$

$\iff -4x - 3 = 0$ ou $-9x + 9 = 0$

$\iff -4x = 3$ ou $-9x = -9$

$\iff x = \dfrac{3}{-4}$ ou $x = \dfrac{-9}{-9}$

On en déduit : $S = \left\{-\dfrac{3}{4}; 1\right\}$

Corrigé de l'exercice 7

1) On reconnaît une équation produit-nul, donc on applique la propriété :

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$\left(x - \dfrac{2}{3}\right)\left(-5x - \dfrac{3}{7}\right) = 0$

$\iff x - \dfrac{2}{3} = 0$ ou $-5x - \dfrac{3}{7} = 0$

$\iff x = \dfrac{2}{3}$ ou $-5x = \dfrac{3}{7}$

$\iff x = \dfrac{2}{3} \div 1$ ou $x = \dfrac{3}{7} \div (-5)$

$\iff x = \dfrac{2}{3} \times 1$ ou $x = \dfrac{3}{7} \times \left(-\dfrac{1}{5}\right)$

$\iff x = \dfrac{2}{3}$ ou $x = -\dfrac{3}{35}$

On en déduit : $S = \left\{-\dfrac{3}{35}; \dfrac{2}{3}\right\}$

2) On reconnaît une équation produit-nul, donc on applique la propriété :

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$\left(\dfrac{1}{7}x + 6\right)\left(\dfrac{-4}{7}x + 4\right) = 0$

$\iff \dfrac{1}{7}x + 6 = 0$ ou $\dfrac{-4}{7}x + 4 = 0$

$\iff \dfrac{1}{7}x = -6$ ou $\dfrac{-4}{7}x = -4$

$\iff x = -6 \div \dfrac{1}{7}$ ou $x = -4 \div \dfrac{-4}{7}$

$\iff x = -6 \times 7$ ou $x = -4 \times \dfrac{7}{-4}$

$\iff x = -42$ ou $x = 7$

On en déduit : $S = \{-42; 7\}$

Corrigé de l'exercice 8

1) $x^2 - 64 = 0$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$:

avec $\quad a = x \quad$ et $\quad b = 8$

On obtient alors :

$$x^2 - 64 = 0$$

$$x^2 - 8^2 = 0 \iff (x-8)(x+8) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$\iff x - 8 = 0 \quad$ ou bien $\quad x + 8 = 0$

$\iff x = 8 \quad$ ou bien $\quad x = -8$

$\iff S = \{-8; 8)$

2) $\quad x^2 = 11$

Pour résoudre ce genre d'équations, il faut essayer de se ramener à une équation produit-nul, donc déjà obtenir une équation nulle.

$\quad x^2 = 11$

$\iff x^2 - 11 = 0$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$:

avec $\quad a = x \quad$ et $\quad b = \sqrt{11}$

On obtient alors :

$$x^2 - 11 = 0$$

$$x^2 - (\sqrt{11})^2 = 0$$

$\iff (x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11}) = 0$

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$\iff x - \sqrt{11} = 0 \quad$ ou bien $\quad x + \sqrt{11} = 0$

$\iff x = \sqrt{11} \quad$ ou bien $\quad x = -\sqrt{11}$

$\iff S = \{-\sqrt{11} \ ; \sqrt{11})$

Corrigé de l'exercice 9

1) $(2x+9)(-4x-9) + (2x+9)(5x+8) = 0$

On observe que $(2x+9)$ est un facteur commun dans les deux termes :

$$\underline{(2x+9)}(-4x-9) + \underline{(2x+9)}(5x+8) = 0$$

$\iff \underline{(2x+9)}\Big((-4x-9) + (5x+8)\Big) = 0$

$\iff (2x+9)(x-1) = 0$

On reconnaît une équation produit-nul, donc on applique la propriété :

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$\iff 2x + 9 = 0 \quad$ ou bien $\quad x - 1 = 0$

$\iff x = -\dfrac{9}{2} \quad$ ou $\quad x = 1$

On en déduit : $S = \left\{-\dfrac{9}{2}; 1\right\}$

2) $(3x-9)(x-7) - (3x-9)(-6x-9) = 0$

On observe que $(3x-9)$ est un facteur commun dans les deux termes :

$$\underline{(3x-9)}(x-7) - \underline{(3x-9)}(-6x-9) = 0$$

$\iff \underline{(3x-9)}\Big((x-7) - (-6x-9)\Big) = 0$

$\iff (3x-9)(x - 7 + 6x + 9) = 0$

$\iff (3x-9)(7x+2) = 0$

On reconnaît une équation produit-nul, donc on applique la propriété :

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$\iff 3x - 9 = 0 \quad$ ou bien $\quad 7x + 2 = 0$

$\iff x = \dfrac{9}{3} \quad$ ou $\quad x = -\dfrac{2}{7}$

On en déduit : $S = \left\{-\dfrac{2}{7}; 3\right\}$

Corrigé de l'exercice 10

1) Déterminer les valeurs interdites revient à déterminer les valeurs qui annulent le dénominateur du quotient, puisque la division par 0 n'existe pas.
Or $-x+4=0$ si et seulement si $x=4$.
Donc l'ensemble des valeurs interdites est $\{4\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$,
$$\frac{2x-2}{-x+4}=0$$
$$2x-2=0 \qquad \text{car } \frac{A(x)}{B(x)}=0 \text{ si et seulement si } A(x)=0 \text{ et } B(x)\neq 0$$
$$x=1$$
1 n'est pas une valeur interdite, donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\mathcal{S}=\{1\}$.

2) Déterminer les valeurs interdites revient à déterminer les valeurs qui annulent le dénominateur du quotient, puisque la division par 0 n'existe pas.
Or $8x-16=0$ si et seulement si $x=2$.
Donc l'ensemble des valeurs interdites est $\{2\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
$$\frac{x^2-1}{8x-16}=0$$
$$x^2-1=0 \qquad \text{car } \frac{A(x)}{B(x)}=0 \text{ si et seulement si } A(x)=0 \text{ et } B(x)\neq 0$$
$$x^2=1$$
$$x^2=1$$
$$x=1 \text{ ou } x=-1$$
-1 et 1 ne sont pas des valeurs interdites, donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\mathcal{S}=\{-1\,;\,1\}$.

Corrigé de l'exercice 11

1) Déterminer les valeurs interdites revient à déterminer les valeurs qui annulent le dénominateur du quotient, puisque la division par 0 n'existe pas.
Or $9x=0$ si et seulement si $x=0$.
Donc l'ensemble des valeurs interdites est $\{0\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
$$\frac{-3-3x}{9x}=-8$$
$$-3-3x=-8\times(9x) \qquad \text{car les produits en croix sont égaux.}$$
$$-3x-3=-72x$$
$$69x=3$$
$$x=\frac{1}{23}$$
$\frac{1}{23}$ n'est pas une valeur interdite, donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{23}\right\}$.

2) Déterminer les valeurs interdites revient à déterminer les valeurs qui annulent les dénominateurs des quotients, puisque la division par 0 n'existe pas.

Or $8x-3=0$ si et seulement si $x=\dfrac{3}{8}$ et $-4x-1=0$ si et seulement si $x=-\dfrac{1}{4}$.

Donc l'ensemble des valeurs interdites est $\left\{-\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{3}{8}\right\}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{3}{8}\right\}$,

$$\frac{2}{8x-3}=\frac{7}{-4x-1}$$

$7\times(8x-3)=2\times(-4x-1)$ car les produits en croix sont égaux.

$$\begin{aligned}56x-21&=-8x-2\\64x&=19\\x&=\frac{19}{64}\end{aligned}$$

$\dfrac{19}{64}$ n'est pas une valeur interdite, donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{19}{64}\right\}$.

Corrigé de l'exercice 12

1) On développe la forme factorisée :

$$\begin{aligned}(x+8)(x+2)&=x^2+2x+8x+16\\&=x^2+10x+16\\&=f(x)\end{aligned}$$

On retrouve la forme développée, donc on en déduit que $f(x)$ peut s'écrire sous forme factorisée : $f(x)=(x+8)(x+2)$.

2) On développe la forme canonique :

$$\begin{aligned}(x+5)^2-9&=\left(x^2+10x+25\right)-9\\&=x^2+10x+16\end{aligned}$$

On en déduit que $f(x)$ s'écrit sous forme canonique : $f(x)=(x+5)^2-9$.

3) a) • Pour déterminer $f(0)$, les calculs à partir de la forme développée sont plus rapides :

$f(0)=0^2+10\times0+10+16=16$

• Pour déterminer $f(-8)$, les calculs à partir de la forme factorisée sont plus rapides :

$f(-8)=(-8+8)(-8+2)=\times0\times(-6)=0$

• Pour déterminer $f(-5)$, les calculs à partir de la forme canonique sont plus rapides :

$f(-5)=(-5+5)^2-9=0-9=-9$

b) On remarque que 16 est la constante de la forme développée.

En utilisant la forme développée, on obtient :

$$\begin{aligned}f(x)=16&\iff x^2+10x+16=16\\&\iff x^2+10x=0\\&\iff x(x+10)=0\\&\iff x=0\quad\text{ou}\quad x+10=0\\&\iff x=0\quad\text{ou}\quad x=-10\end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : 0 et -10.

c) En utilisant la forme canonique, cela revient à résoudre une équation avec un carré isolé.

$$\begin{aligned}f(x)=-9&\iff (x+5)^2-9=-9\\&\iff (x+5)^2=0\\&\iff x+5=0\\&\iff x=-5\end{aligned}$$

L'équation a une solution : -5.

d) En utilisant la forme factorisée, cela revient à résoudre une équation produit-nul.

$$\begin{aligned}f(x)=0&\iff (x+8)(x+2)=0\\&\iff x+8=0\quad\text{ou}\quad x+2=0\\&\iff x=-8\quad\text{ou}\quad x=-2\end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : -8 et -2.

Corrigé de l'exercice 13

1) On développe la forme canonique :

$$\begin{aligned} f(x) &= -3\,(x-5)^2+48 \\ &= -3\left(x^2-10x+25\right)+48 \\ &= -3x^2+30x-75+48 \\ &= -3x^2+30x-27 \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x)$ s'écrit sous forme développée : $f(x) = -3x^2+30x-27$.

2) On développe la forme factorisée :

$$\begin{aligned} -3(x-9)(x-1) &= -3\left(x^2-x-9x+9\right) \\ &= -3x^2+3x+27x-27 \\ &= -3x^2+30x-27 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On retrouve la même forme développée que celle de la question précédente donc on a bien $f(x) = -3(x-9)(x-1)$.

3) a) • Pour déterminer $f(0)$, les calculs à partir de la forme développée sont plus rapides :
$f(0) = -3\times 0^2+30\times 0-27 = -27$
• Pour déterminer $f(1)$, les calculs à partir de la forme factorisée sont plus rapides :
$f(1) = -3(1-9)(1-1) = -3\times 0\times(-8) = 0$
• Pour déterminer $f(5)$, les calculs à partir de la forme canonique sont plus rapides :
$f(5) = -3\,(5-5)^2+48 = 0+48 = 48$

b) En utilisant la forme factorisée, cela revient à résoudre une équation produit-nul.

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\iff -3(x-9)(x-1)=0 \\ &\iff x-9=0 \quad \text{ou} \quad x-1=0 \\ &\iff x=9 \quad \text{ou} \quad x=1 \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : 9 et 1.

c) On remarque que -27 est la constante de la forme développée.
En utilisant la forme développée, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x)=-27 &\iff -3x^2+30x-27=-27 \\ &\iff -3x^2+30x=0 \\ &\iff x\,(-3x+30)=0 \\ &\iff x=0 \quad \text{ou} \quad -3x+30=0 \\ &\iff x=0 \quad \text{ou} \quad x=10 \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : 0 et 10.

d) En utilisant la forme canonique, cela revient à résoudre une équation avec un carré isolé.

$$\begin{aligned} f(x)=48 &\iff -3\,(x-5)^2+48=48 \\ &\iff -3\,(x-5)^2=0 \\ &\iff (x-5)^2=0 \\ &\iff x-5=0 \\ &\iff x=5 \end{aligned}$$

L'équation a une solution : 5.

Corrigé de l'exercice 14

En notant x, le nombre de km parcourus, on a :

- Avec le tarif A, le prix à payer est : $0{,}35x + 22$;
- Avec le tarif B, le prix à payer est : $0{,}26x + 37$;

Les deux tarifs sont identiques lorsque : $0{,}35x + 22 = 0{,}26x + 37$.

On résout l'équation :

$$0{,}35x + 22 = 0{,}26x + 37$$

$$0{,}35x - 0{,}26x + 22 = 0{,}26x + 37 - 0{,}26x$$

$$0{,}09x + 22 = 37$$

$$0{,}09x + 22 - 22 = 37 - 22$$

$$0{,}09x = 15$$

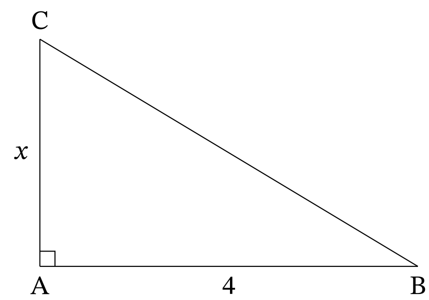
$$\frac{0{,}09x}{0{,}09} = \frac{15}{0{,}09}$$

$x \simeq 167$

C'est pour une distance d'environ 167 km que les deux tarifs sont identiques.

Corrigé de l'exercice 15

On réalise une petite figure à main levée pour visualiser la situation :



Le carré de l'hypoténuse est égal à 57. On a donc $BC^2 = 57$.

Le triangle ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$16 + x^2 = 57$$

$$16 + x^2 - 16 = 57 - 16$$

$$x^2 = 41$$

$$x = \sqrt{41} \qquad \text{car } x > 0$$

La valeur de x cherchée est $\sqrt{41}$.

Corrigé de l'exercice 16

1) Notons x la longueur du côté du carré initial.

   Si on augmente la longueur du côté de 5, on obtient un carré dont l'aire est $(x+5)^2$. Or, cette aire est égale à quatre fois celle du carré initial, donc à $4x^2$. On est donc amené à résoudre l'équation $(x+5)^2 = 4x^2$.

$$\begin{aligned}
(x+5)^2 = 4x^2 &\iff (x+5)^2 - 4x^2 = 0 \\
&\iff (x+5)^2 - (2x)^2 \\
&\iff (x+5-2x)(x+5+2x) = 0 \\
&\iff (-x+5)(3x+5) = 0 \\
&\iff -x+5 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x+5 = 0 \\
&\iff -x = -5 \quad \text{ou} \quad 3x = -5 \\
&\iff x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5}{3}
\end{aligned}$$

   Or, x est une longueur donc x est un réel positif ou nul et finalement $x = 5$.

2) Soit n un entier relatif.

Les entiers qui encadrent n sont $(n-1)$ et $(n+1)$ et donc, le double du produit de ces entiers est $2(n-1)(n+1)$.

Il s'agit donc de démontrer que l'équation $n^2 = 2(n-1)(n+1)$ n'a pas de solution entière. Or,

$$\begin{aligned} n^2 = 2(n-1)(n+1) &\iff n^2 = 2(n^2 - 1^2) \\ &\iff n^2 = 2n^2 - 2 \\ &\iff -n^2 = -2 \\ &\iff n^2 = 2 \\ &\iff n = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad n = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Or, $\sqrt{2}$ n'est pas un entier relatif donc l'équation $n^2 = 2(n-1)(n+1)$ n'a pas de solution entière.

Autrement dit, il n'existe pas d'entier relatif dont le carré est égal au double du produit des entiers qui l'encadrent.

3) On note x la longueur du côté du carré $ABCD$.

En augmentant la longueur du côté $[AB]$ de 8 et la longueur du côté $[AD]$ de 5, on obtient un rectangle dont la longueur est $x+8$ et la largeur est $x+5$. L'aire de ce rectangle est donc $(x+8)(x+5)$.

Or, l'aire de ce rectangle surpasse celle du carré initial de 183, elle est donc aussi égale à $x^2 + 183$.

On est donc ramené à résoudre l'équation $x^2 + 183 = (x+8)(x+5)$.

$$\begin{aligned} x^2 + 183 = (x+8)(x+5) &\iff x^2 + 183 = x^2 + 5x + 8x + 40 \\ &\iff x^2 + 183 = x^2 + 13x + 40 \\ &\iff 183 = 13x + 40 \\ &\iff 143 = 13x \\ &\iff x = \frac{143}{13} \\ &\iff x = 11 \end{aligned}$$

Finalement, la longueur du côté du carré $ABCD$ est 11.

Corrigé de l'exercice 17

1) Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned} 1710 + \frac{9}{100}x = 900 + \frac{1}{10}x &\iff 810 + \frac{9}{100}x = \frac{1}{10}x \\ &\iff 810 = \frac{1}{10}x - \frac{9}{100}x \\ &\iff 810 = \frac{10}{100}x - \frac{9}{100}x \\ &\iff 810 = \frac{1}{100}x \\ &\iff x = 810 \times 100 \\ &\iff x = 81\,000 \end{aligned}$$

L'équation admet une seule solution : 81000.

2) a) L'aîné reçoit $1\,000 + \frac{1}{10} \times (x - 1\,000) = 1\,000 + \frac{1}{10}x - 100 = \frac{1}{10}x + 900$.

b) Le deuxième enfant reçoit 2 000 € et un dixième de la somme restante.

Or, la somme restante est égale à :

$$\begin{aligned} x - \left(\frac{1}{10}x + 900\right) - 2\,000 &= x - \frac{1}{10}x - 900 - 2\,000 \\ &= \frac{9}{10}x - 2\,900 \end{aligned}$$

Le deuxième enfant reçoit donc :

$$\begin{aligned} 2\,000 + \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}x - 2\,900\right) &= 2\,000 + \frac{9}{100}x - 290 \\ &= 1\,790 + \frac{9}{100}x \end{aligned}$$

c) Les deux premiers enfants reçoivent la même somme.
Donc x est solution de l'équation $\frac{1}{10}x + 900 = 1\,790 + \frac{9}{100}x$.
D'après la question 1), la solution de l'équation est $x = 81\,000$.
La somme totale à partager est donc 81 000 €.

d) L'aîné reçoit $\frac{1}{10} \times 81\,000 + 900 = 8\,100 + 900 = 9\,000$ €.
Chaque enfant reçoit 9 000 €. Il y a donc $\frac{81\,000}{9\,000} = 9$ enfants.

Corrigé de l'exercice 18

1) Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned}
x^2 - x - 2 &= x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times x - 2 \\
&= x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

On en déduit que $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{9}{4}$ conviennent.

2) Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned}
x^2 - x - 2 = 0 &\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0 \\
&\iff (x-2)(x+1) = 0 \\
&\iff x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 1 = 0 \\
&\iff x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -1
\end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : 2 et -1.

Corrigé de l'exercice 19

1) $\frac{2 \times 3^2 - 3}{5} = \frac{2 \times 9 - 3}{5} = \frac{15}{5} = 3$.
On en déduit que 3 est une solution de l'équation (E).

2) a) Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned}
(x-3)(2x+1) &= 2x^2 + x - 6x - 3 \\
&= 2x^2 - 5x - 3
\end{aligned}$$

b) Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2 - 3}{5} = x &\iff 2x^2 - 3 = 5 \times x \\
&\iff 2x^2 - 5x - 3 = 0 \\
&\iff (x-3)(2x+1) = 0
\end{aligned}$$

3) Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2 - 3}{5} = x &\iff (x-3)(2x+1) = 0 \\
&\iff x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 1 = 0 \\
&\iff x = 3 \quad \text{ou} \quad 2x = -1 \\
&\iff x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -0{,}5
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont 3 et $-0{,}5$.

Corrigé de l'exercice 20

1) a) $\dfrac{105-6\times(-7)}{3}=\dfrac{105+42}{3}=\dfrac{147}{3}=49$ et $(-7)^2=49$.

   b) On en déduit que -7 est une solution de l'équation (E).

2) a) Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned}(3x-15)(x+7)&=3x^2+21x-15x-105\\&=3x^2+6x-105\end{aligned}$$

   b) Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned}\frac{105-6x}{3}=x^2 &\iff 105-6x=3\times x\\&\iff 3x^2+6x-105=0\\&\iff (3x-15)(x+7)=0\end{aligned}$$

3) Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned}\frac{105-6x}{3}=x^2 &\iff (3x-15)(x+7)=0\\&\iff 3x-15=0 \quad\text{ou}\quad x+7=0\\&\iff 3x=15 \quad\text{ou}\quad x=-7\\&\iff x=\frac{15}{3} \quad\text{ou}\quad x=-7\\&\iff x=5 \quad\text{ou}\quad x=-7\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont 5 et -7.

Corrigé de l'exercice 21

On note x le prix d'une baguette de pain en euro.
La moitié du prix de la baguette augmenté de 0,70 € est égal à $0{,}5x+0{,}70$.
Le double du prix de la baguette diminué de 0,65 € est égal à $2x-0{,}65$.
On est donc amené à résoudre l'équation $0{,}5x+0{,}70=2x-0{,}65$. On a :

$$\begin{aligned}0{,}5x+0{,}70=2x-0{,}65 &\iff 0{,}5x-2x+0{,}70=-0{,}65\\&\iff -1{,}5x=-0{,}65-0{,}70\\&\iff -1{,}5x=-1{,}35\\&\iff x=\frac{-1{,}35}{-1{,}5}\\&\iff x=0{,}90\end{aligned}$$

La baguette coûte 0,90 €.

Corrigé de l'exercice 22

On note x le nombre cherché.
Soustraire 3 à x revient à calculer $x-3$ et diviser x par 3 revient à calculer $\dfrac{x}{3}$.
On est donc amené à résoudre l'équation $x-3=\dfrac{x}{3}$;

$$\begin{aligned}x-3=\frac{x}{3} &\iff 3\times(x-3)=3\times\frac{x}{3}\\&\iff 3x-9=x\\&\iff 2x-9=0\\&\iff 2x=9\\&\iff x=4{,}5\end{aligned}$$

Le nombre cherché est $x=4{,}5$.

Corrigé de l'exercice 23

1) On a :

$$\begin{aligned} E &= (3x+8)^2 - 64 \\ &= (3x)^2 + 2\times 3x \times 8 + 8^2 - 64 \\ &= 9x^2 + 48x + 64 - 64 \\ &= 9x^2 + 48x \end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned} E &= 9x^2 + 48x \\ &= 3x \times 3x + 3x \times 16 \\ &= 3x \times (3x+16) \end{aligned}$$

3) On a :

$$\begin{aligned} (3x+8)^2 - 64 = 0 &\iff 3x(3x+16) = 0 \\ &\iff 3x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x+16 = 0 \\ &\iff x = \frac{0}{3} \quad \text{ou} \quad 3x = -16 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

Les solutions sont 0 et $-\dfrac{16}{3}$.

Corrigé de l'exercice 24

1) a) Soit x un nombre réel. On a :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x = 0 &\iff x(x+2) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x+2 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = \{-2\ ;\ 0\}$.

b) Soit x un nombre réel. On a :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 = 0 &\iff x^2 + 2\times x \times 1 + 1^2 = 0 \\ &\iff (x+1)^2 = 0 \\ &\iff x+1 = 0 \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = \{-1\}$

2) a) Soit x un nombre réel. On a :

$$\begin{aligned} (x+1)^2 - 1 + m &= x^2 + 2\times x \times 1 + 1^2 - 1 + m \\ &= x^2 + 2x + 1 - 1 + m \\ &= x^2 + 2x + m \end{aligned}$$

b) Soit x un nombre réel. On a :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 = 0 &\iff (x+1)^2 - 1 + m = 0 \\ &\iff (x+1)^2 = 1 - m \end{aligned}$$

Donc, résoudre l'équation **(E)** revient à résoudre l'équation $(x+1)^2 = 1 - m$.

c) Un carré est toujours positif ou nul. Le membre de gauche est un carré donc l'équation **(E)** admet au moins une solution si $1 - m \geqslant 0$ c'est-à-dire si $m \leqslant 1$.

Corrigé de l'exercice 25

On note x le nombre de grands coquillages ramassés par Louis.

Puisque Louis a ramassé 30 coquillages en tout, le nombre de petits coquillages est $30 - x$.

La longueur de tous les coquillages mis bout à bout est donc $2 \times x + 1{,}5 \times (30 - x)$.

On est donc amené à résoudre l'équation $2x + 1{,}5(30 - x) = 54$.

$$\begin{aligned} 2x + 1{,}5(30 - x) = 54 &\iff 2x + 45 - 1{,}5x = 54 \\ &\iff 0{,}5x + 45 = 54 \\ &\iff 0{,}5x = 9 \\ &\iff x = \frac{9}{0{,}5} \\ &\iff x = 18 \end{aligned}$$

Louis a ramassé 18 grands coquillages et $30 - 18 = 12$ petits coquillages.

Corrigé de l'exercice 26

La longueur du rectangle est $3 \times b + 2{,}9$, sa largeur est 4,5.

On est donc amené à résoudre l'équation $2 \times (3b + 2{,}9 + 4{,}5) = 25$.

Or,

$$\begin{aligned} 2 \times (3b + 2{,}9 + 4{,}5) = 25 &\iff 2(3b + 7{,}4) = 25 \\ &\iff 6b + 14{,}8 = 25 \\ &\iff 6b = 10{,}2 \\ &\iff b = \frac{10{,}2}{6} \\ &\iff b = 1{,}7 \end{aligned}$$