Fonctions généralités : Calculs (Correction) Seconde

Corrigé de l'exercice 1

1) $f(x) = x^2 + 4x + 5$ donc ici on a : $f(2) = 2^2 + 4 \times 2 + 5 = 4 + 8 + 5 = 17$
$f(2) = \mathbf{17}$

2) $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x}{x^2 - 2x}$ donc ici on a : $f(4) = \dfrac{-2 \times 4^2 + 2 \times 4}{4^2 - 2 \times 4} = \dfrac{-32 + 8}{16 - 8} = \dfrac{-24}{8} = \dfrac{-6}{2}$
$f(4) = \mathbf{-3}$

3) $f(x) = x^2 - 6x + 4$ donc ici on a : $f(2) = 2^2 - 6 \times 2 + 4 = 4 - 12 + 4 = -4$
$f(2) = \mathbf{-4}$

Corrigé de l'exercice 2

1) $f(x) = -4x + 8$ donc ici on a : $-4x + 8 = -12$
Soit $x = \dfrac{(-12 - 8)}{-4} = 5$
$f(\mathbf{5}) = -12$

2) $f(x) = 3x + 2$ donc ici on a : $3x + 2 = -10$
Soit $3x = -10 - 2 = -12$ d'où $x = \dfrac{-12}{3} = -4$
$f(\mathbf{-4}) = -10$

3) $f(x) = 6x + 4$ donc ici on a : $6x + 4 = 28$
Soit $6x = 28 - 4 = 24$ d'où $x = \dfrac{24}{6} = 4$
$f(\mathbf{4}) = 28$

Corrigé de l'exercice 3

1) L'égalité traduisant que M est sur la courbe représentant v est : $v(-2) = 2$
2) L'égalité traduisant cette phrase est : $t(5) = 7$
3) L'égalité $m(-9) = -7$ se traduit par :
   - L'image de -9 par la fonction m est -7.
   - -9 a pour image -7 par la fonction m.

Corrigé de l'exercice 4

1) Puisque le point M appartient à $\mathscr{C}$, son ordonnée est l'image de son abscisse par la fonction h.
$h(8) = -1 \times 8^2 - 10 \times 8 - 8 = -64 - 80 - 8 = -152$ donc L'ordonnée du point M est -152.

2) Si un point de $\mathscr{C}$ a pour ordonnée -8, son abscisse est un antécédent de -8.
On cherche donc x tel que $f(x) = -8$, c'est-à-dire $\dfrac{-3}{x} + 1 = -8$.
Pour $x \neq 0$, $\dfrac{-3}{x} + 1 = -8$ donc $\dfrac{-3}{x} = -9$. L'égalité des produits en croix donne $x \times (-9) = -3$ soit $x = \dfrac{-3}{-9} = \dfrac{1 \times 3}{3 \times 3} = \dfrac{1}{3}$.
Un seul point de $\mathscr{C}$ a pour ordonnée -8. Son abscisse est $\dfrac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 5

1) La fonction est définie sur $D = [-7; 7]$. Donc, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et l'ensemble de définition est bien symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in D$. $f(-x) = -5(-x)^2 - 8 = -5x^2 - 8 = f(x)$.
On observe que pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$, la fonction f est donc paire.

2) La fonction étant paire, sa courbe représentative admet une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Corrigé de l'exercice 6

-9 est bien dans l'ensemble de définition de f et :
$f(x_A) = f(-9) = 3 \times (-9)^2 + 8 \times (-9) + 4 = 243 - 72 + 4 = 175 \neq 174$.
L'image de -9 n'est pas l'ordonnée du point A, donc le point A n'est pas sur $\mathscr{C}_f$.

Corrigé de l'exercice 7

1) On développe l'expression donnée :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+5)^2 - 4 \\ &= \left(x^2 + 10x + 25\right) - 4 \\ &= x^2 + 10x + 21 \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = x^2 + 10x + 21$.

2) On développe l'expression :
$$\begin{aligned}(x+7)(x+3) &= x^2+3x+7x+21\\ &= x^2+10x+21\\ &= f(x)\end{aligned}$$
On retrouve la même forme développée que celle de la question précédente donc on a bien $f(x) = (x+7)(x+3)$.

3) a) Les coordonnées du point d'intersection entre l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}_f$ sont $(0\,;\,f(0))$.
Pour déterminer $f(0)$, les calculs à partir de la forme développée sont plus rapides :
$f(0) = 0^2 + 10 \times 0 + 21 = 21$
On en déduit que les coordonnées du point d'intersection entre l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}_f$ sont $(0\,;\,21)$.

b) Les coordonnées des points d'intersection entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ sont de la forme $(x\,;\,0)$. Pour trouver les abscisses, il faut donc résoudre l'équation $f(x) = 0$.
En utilisant la forme factorisée, cela revient à résoudre une équation produit-nul.
$$\begin{aligned}f(x)=0 &\iff (x+7)(x+3)=0\\ &\iff x+7=0 \quad \text{ou} \quad x+3=0\\ &\iff x=-7 \quad \text{ou} \quad x=-3\end{aligned}$$
L'équation a deux solutions : -7 et -3.
On en déduit que les coordonnées des points d'intersection entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ sont $(-7\,;\,0)$ et $(-3\,;\,0)$

c) En traçant la courbe à l'aide de la calculatrice par exemple, on conjecture que le minimum de f est -4.
Pour le démontrer, on utilise la forme donnée dans la consigne.
Pour tout réel x,
$$\begin{aligned}&(x+5)^2 \geqslant 0\\ \iff &(x+5)^2-4 \geqslant -4\\ \iff &f(x) \geqslant -4\end{aligned}$$
Comme $f(-5) = (-5+5)^2 - 4 = -4$ alors $f(x) \geqslant f(-5)$.
On en déduit que le minimum de f est -4 et qu'il est atteint en $x = -5$.

d) Les coordonnées des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = 21$ sont de la forme $(x\,;\,21)$.
Pour trouver les abscisses, il faut donc résoudre l'équation $f(x) = 21$.
On remarque que 21 est la constante de la forme développée.
On utilise donc la forme développée pour résoudre cette équation :
$$\begin{aligned}f(x)=21 &\iff x^2+10x+21=21\\ &\iff x^2+10x=0\\ &\iff x\,(x+10)=0\\ &\iff x=0 \quad \text{ou} \quad x+10=0\\ &\iff x=0 \quad \text{ou} \quad x=-10\end{aligned}$$
L'équation a deux solutions : 0 et -10.
On en déduit que $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = 21$ ont deux points d'intersection :
$A(0\,;\,f(0))$ et $B(-10\,;\,f(-10))$, soit $A(0\,;\,21)$ et $B(-10\,;\,21)$.

Corrigé de l'exercice 8

1) Le carré de la vitesse est v^2, donc la fonction d est définie par : $d(v) = \dfrac{v^2}{202{,}4}$.

2) $d(82) = \dfrac{82^2}{202{,}4} \simeq 33$. La distance de freinage est d'environ 33.

3) La distance de freinage n'est pas proportionnelle à la vitesse car la fonction d n'est pas une fonction linéaire. Elle ne traduit pas une situation de proportionnalité.

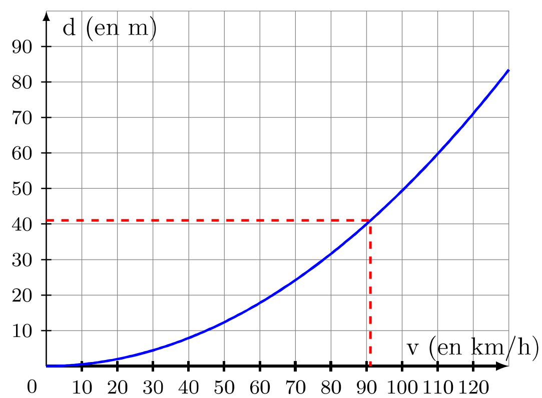
4) On cherche v tel que $d(v) = 41$.

$\dfrac{v^2}{202{,}4} = 41 \iff v^2 = 41 \times 202{,}4 \iff v^2 = 8\,298{,}4 \iff v = -\sqrt{8\,298{,}4} \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{8\,298{,}4}$

Puisque v est un nombre positif, on en déduit $v = \sqrt{8\,298{,}4} \simeq 91$.

Lorsque la distance de freinage de la voiture est 41 m, sa vitesse est alors d'environ 91 km/h.

Voici la courbe représentative de la fonction d avec la solution de la question précédente lue graphiquement.



Corrigé de l'exercice 9

1) On développe la forme factorisée :
$(x+3)(x-7) = x^2 - 7x + 3x - 21 = x^2 - 4x - 21 = f(x)$
On retrouve la forme développée, donc on en déduit que $f(x)$ peut s'écrire sous forme factorisée : $f(x) = (x+3)(x-7)$.

2) On développe la forme canonique :
$(x-2)^2 - 25 = \left(x^2 - 4x + 4\right) - 25 = x^2 - 4x - 21$
On en déduit que $f(x)$ s'écrit sous forme canonique : $f(x) = (x-2)^2 - 25$.

3) a) En utilisant la forme factorisée, cela revient à résoudre une équation produit-nul.
$f(x) = 0 \iff (x+3)(x-7) = 0 \iff x+3 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 7 = 0 \iff x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 7$
L'équation a deux solutions : -3 et 7.

b) En utilisant la forme canonique, cela revient à résoudre une équation avec un carré isolé.
$f(x) = -25 \iff (x-2)^2 - 25 = -25 \iff (x-2)^2 = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$
L'équation a une solution : 2.

c) On remarque que -21 est la constante de la forme développée.
En utilisant la forme développée, on obtient :
$$\begin{aligned} f(x) = -21 &\iff x^2 - 4x - 21 = -21 \iff x^2 - 4x = 0 \iff x\,(x-4) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 4 = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 4 \end{aligned}$$
L'équation a deux solutions : 0 et 4.

d) • Pour déterminer $f(0)$, les calculs à partir de la forme développée sont plus rapides :
$f(0) = 0^2 - 4 \times 0 - 4 - 21 = -21$
• Pour déterminer $f(-3)$, les calculs à partir de la forme factorisée sont plus rapides :
$f(-3) = (-3+3)(-3-7) = \times 0 \times (-10) = 0$
• Pour déterminer $f(2)$, les calculs à partir de la forme canonique sont plus rapides :
$f(2) = (2-2)^2 - 25 = 0 - 25 = -25$

Corrigé de l'exercice 10

1) On développe la forme factorisée :
$$\begin{aligned} f(x) &= -3(x+5)(x+7) \\ &= -3\left(x^2 + 7x + 5x + 35\right) \\ &= -3x^2 - 21x - 15x - 105 \\ &= -3x^2 - 36x - 105 \end{aligned}$$
On en déduit que $f(x)$ s'écrit sous forme développée : $f(x) = -3(x+5)(x+7)$.

2) On développe la forme canonique :
$$\begin{aligned} -3\,(x+6)^2 + 3 &= -3\left(x^2 + 12x + 36\right) + 3 \\ &= -3x^2 - 36x - 108 + 3 \\ &= -3x^2 - 36x - 105 \end{aligned}$$
On en déduit que $f(x)$ s'écrit sous forme canonique : $f(x) = -3\,(x+6)^2 + 3$.

3) a) En utilisant la forme canonique, cela revient à résoudre une équation avec un carré isolé.

$$\begin{aligned} f(x)=3 &\iff -3\left(x+6\right)^2+3=3 \\ &\iff -3\left(x+6\right)^2=0 \\ &\iff \left(x+6\right)^2=0 \\ &\iff x+6=0 \\ &\iff x=-6 \end{aligned}$$

L'équation a une solution : -6.

b) En utilisant la forme factorisée, cela revient à résoudre une équation produit-nul.

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\iff -3(x+5)(x+7)=0 \\ &\iff x+5=0 \quad \text{ou} \quad x+7=0 \\ &\iff x=-5 \quad \text{ou} \quad x=-7 \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : -5 et -7.

c) On remarque que -105 est la constante de la forme développée.
En utilisant la forme développée, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x)=-105 &\iff -3x^2-36x-105=-105 \\ &\iff -3x^2-36x=0 \\ &\iff x\left(-3x-36\right)=0 \\ &\iff x=0 \quad \text{ou} \quad -3x-36=0 \\ &\iff x=0 \quad \text{ou} \quad x=-12 \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : 0 et -12.

d) • Pour déterminer $f(0)$, les calculs à partir de la forme développée sont plus rapides :
$f(0)=-3\times 0^2-36\times 0-105=-105$
• Pour déterminer $f(-7)$, les calculs à partir de la forme factorisée sont plus rapides :
$f(-7)=-3(-7+5)(-7+7)=-3\times 0\times(-2)=0$
• Pour déterminer $f(-6)$, les calculs à partir de la forme canonique sont plus rapides :
$f(-6)=-3\left(-6+6\right)^2+3=0+3=3$

Corrigé de l'exercice 11

1) a) $OCDE$ est un rectangle donc $CD=OE=OF+FE=4+15=19$ et $ED=OC=OB+BC=6+5=11$.
La longueur de grillage utilisée est $BC+CD+DE+EF=5+19+11+15=50$ m donc Leïla utilise bien tout le grillage.

b) L'aire de l'enclos est donnée par : $OC\times OE=11\times 19=209$ m^2.

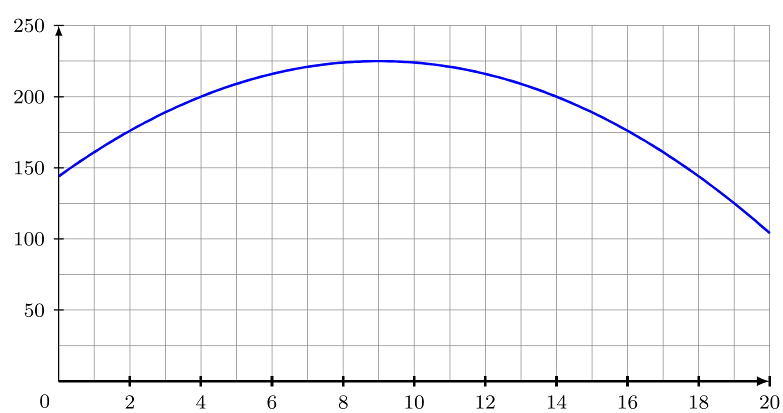
2) a) Comme la longueur du grillage est 50 m, on obtient l'égalité :

$$y+(x+6)+(y+4)+x=50$$

d'où $2y+2x+10=50$ et donc $2y=40-2x$ soit finalement $y=20-x$.

b) L'aire de l'enclos est alors donnée par : $OC\times OE=(x+6)(y+4)=(x+6)(20-x+4)=(x+6)(24-x)$.
En développant, on obtient $24x-x^2+144-6x=-x^2+18x+144$.
La formule de Cyril est donc correcte.

3) En traçant la courbe représentative de la fonction A sur la calculatrice, on obtient :



On en déduit que l'aire de l'enclos est maximale lorsque $x=9$. La largeur de l'enclos est $OC=x+6=15$ m et sa longueur est $OE=y+4=20-x+4=15$ m.
$OCDE$ est donc un carré ! L'aire maximale est 225 m^2.

Corrigé de l'exercice 12

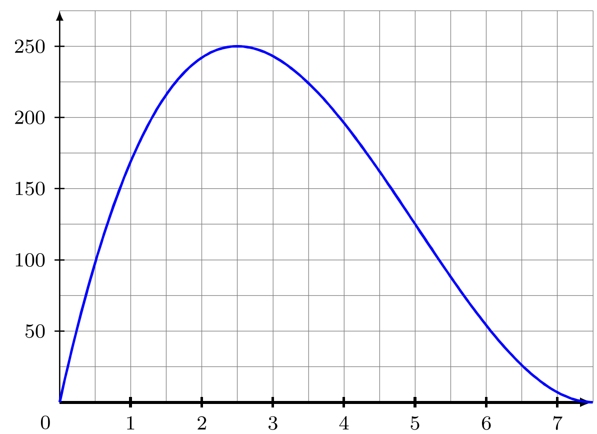
1) La boîte est un parallélépipède rectangle dont la base est un carré de côté $15-2\times 3=9$ cm et de hauteur 3 cm donc son volume est égal à $9^2\times 3=243$ cm^3.

2) $2\times 8=16>15$ donc on ne peut pas réaliser une boîte sachant que $BM=8$ cm.

3) BM est une distance donc $BM \geqslant 0$ et puisque $BOIT$ est un carré de côté 15 cm, $BM \leqslant 7{,}5$. On en déduit que x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 7{,}5]$ et donc que $\mathcal{V}$ est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 7{,}5]$.

4) Soit $x \in [0\ ;\ 7{,}5]$.
La base du parallélépipède rectangle est un carré de côté $15-2x$ et de sa hauteur est x. Le volume est donné par $\mathcal{V} = (15-2x)^2 \times x = (225-60x+4x^2) \times x = 225x - 60x^2 + 4x^3$.

5) On utilise le menu Graph de la calculatrice. On obtient :



6) Le volume $\mathcal{V}(x)$ est supérieur ou égal à 100 lorsque $x \in [0{,}51\ ;\ 5{,}34]$.

7) 1 dL=100 cm^3. Par exemple, pour $x = 3$, on a $R(3) = 243 > 100$ donc le volume peut dépasser 1 dL.

Corrigé de l'exercice 13

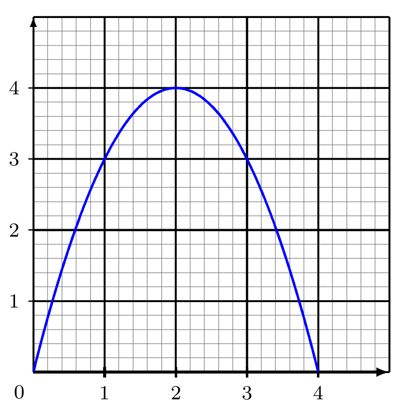
Partie A

1) $MB = AB - AM = 4 - x$

2) Le triangle AMQ est un triangle rectangle et isocèle en M donc $AM = MQ = x$.
$MBPQ$ est un carré si, et seulement si, $MB = MQ$ c'est-à-dire si $x = 4 - x$ et donc si $2x = 4$ soit finalement $x = 2$.

3) L'aire, en cm^2, du rectangle $MBPQ$ est donnée par $S(x) = MB \times MQ = (4-x) \times x = 4x - x^2$.

4) On obtient le graphique suivant :



Partie B

1) • 2 admet deux antécédents par la fonction S donc il existe deux rectangle ayant pour aire 2 cm^2 : le premier pour $x \approx 0{,}6$, le second pour $x \approx 3{,}4$.
• 4 admet un seul antécédent par la fonction S : 2 donc il existe un unique rectangle ayant pour aire 4 cm^2 : c'est pour $x = 2$.
• 5 n'a pas d'antécédent par la fonction S donc il n'existe aucun rectangle ayant pour aire 5 cm^2.

2) Soit $x \in [0; 4]$.
• $x(4-x) - 3 = 4x - x^2 - 3 = -x^2 + 4x - 3$
• $(1-x)(x-3) = x - 3 - x^2 + 3x = -x^2 + 4x - 3$

On conclut alors que, pour tout $x \in [0; 4]$, $(x(4-x) - 3 = (1-x)(x-3)$

3) Soit $x \in [0; 4]$.
$S(x) = 3 \iff x(4-x) = 3 \iff x(4-x) - 3 = 0 \iff (1-x)(x-3) = 0 \iff 1 - x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0 \iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 3$
On en déduit qu'il existe deux rectangles ayant pour aire 3 cm^2 : pour $x = 1$ et pour $x = 3$.

Corrigé de l'exercice 14

1) Avec le programme 1, on obtient $3 \times 5 + 1 = 15 + 116$.
Avec la programme 2, on obtient $(5 - 1)(5 + 2) = 4 \times 7 = 28$.

2) a) pour tout nombre réel x, $A(x) = 3x + 1$.
b) Pour tout nombre réel x, $B(x) = (x - 1)(x + 2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$.
c) Soit x un nombre réel.
$A(x) = \frac{1}{3} \iff 3x + 1 = \frac{1}{3} \iff 3x = -\frac{2}{3} \iff x = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \iff x = -\frac{2}{9}$
En choisissant $-\frac{2}{9}$, on obtient $\frac{1}{3}$ avec le programme 1.
d) Soit x un nombre réel.
$B(x) = 0 \iff (x - 1)(x + 2) = 0 \iff x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0 \iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -2.$
On doit donc choisir 1 ou -2 pour obtenir 0 avec le programme 2.

3) a) Soit x un nombre réel
- $B(x) - A(x) = x^2 + x - 2 - (3x + 1) = x^2 + x - 2 - 3x - 1 = x^2 - 2x - 3$
- $(x + 1)(x - 3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3$

On en conclut alors, que, pour tout nombre réel x, $B(x) - A(x) = (x + 1)(x - 3)$.
b) Soit x un nombre réel.
$B(x) = A(x) \iff B(x) - A(x) = 0 \iff (x + 1)(x - 3) = 0 \iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 3$
Par conséquent, il faut choisir -1 ou 3 pour que le programme 1 et le programme 2 donnent le même résultat.

Corrigé de l'exercice 15

1) a) L'image de 0 est 1 donc la flèche est tirée d'une hauteur de 1 m.
b) 0 admet un seul antécédent : 10 donc la flèche retombe au sol à 10 m de Julien.
c) La hauteur maximale atteinte par la flèche est 3 m.

2) a) Soit $x \in [0 \ ; \ 10]$.
- $f(x) = 1 \iff -0{,}1x^2 + 0{,}9x + 1 = 1 \iff -0{,}1x^2 + 0{,}9x = 0 \iff x(-0{,}1x + 0{,}9) = 0$
- $x(-0{,}1x + 0{,}9) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -0{,}1x + 0{,}9x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 9.$

L'équation admet deux solutions : 0 et 9. On en déduit que la flèche est à une hauteur de 1 mètre au départ et lorsqu'elle a parcouru 9 mètres.
b) $f(5) = -0{,}1 \times 5^2 + 0{,}9 \times 5 + 1 = 3$
c) $f(4{,}5) = -0{,}1 \times 4{,}5^2 + 0{,}9 \times 4{,}5 + 1 = 3{,}025$ donc la flèche s'élève à plus de 3 mètres de haut.

Corrigé de l'exercice 16

1) a) Notons ℓ la largeur du rectangle. On a $2 \times (\ell + 10) = 31$ d'où $\ell + 10 = 15{,}5$ soit $\ell = 5{,}5$.
La largeur du rectangle est 5,5 cm.
b) Si la longueur a pour mesure 13 cm, on a : $\ell = 2{,}5$ cm.
c) On a $2 \times (AB + BC) = 31$ d'où $x + BC = 15{,}5$ soit $BC = 15{,}5 - x$.
d) L'aire du rectangle $ABCD$ est $\mathcal{A}(x) = AB \times BC = x \times (15{,}5 - x) = 15{,}5x - x^2$.

2) a) $f(4) = 4 \times (15{,}5 - 4) = 4 \times 11{,}5 = 46$.
b) $f(5) = 5 \times (15{,}5 - 5) = 5 \times 10{,}5 = 52{,}5$ donc 5 est bien un antécédent de 52,5 par la fonction f.

3) a) Lorsque $x = 3$, l'aire du triangle $ABCD$ vaut environ 38.
b) L'aire du rectangle $ABCD$ est égale à 40 cm^2 lorsque $x \approx 3{,}3$ et $x \approx 12{,}2$.
c) L'aire maximale du rectangle est environ égale à 60 cm^2. Elle est atteinte pour $x \approx 7{,}75$.

4) Si $AB = 7{,}75$ alors $BC = 15{,}5 - 7{,}75 = 7{,}75$ donc le rectangle est un carré de côté 7,75 cm.