Corrigé de l'exercice 1

1) $f_1(2) = 2^2 = 2 \times 2 = 4$.
L'image de 2 par la fonction f_1 est 4.

2) $g_1(-0) = \dfrac{1}{-0{,}000\,1} = -\dfrac{1}{0{,}000\,1} = -\dfrac{1}{10^{-4}} = -10^4 = -10\,000$
L'image de $-0{,}000\,1$ par la fonction g_1 est donc $-10\,000$.

3) $h_1(-1) = (-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$.
L'image de -1 par la fonction h_1 est -1.

4) $p_1(16) = \sqrt{16} = 4$ car $4^2 = 16$ et $4 \geqslant 0$.
L'image de 16 par la fonction p_1 est 4.

Corrigé de l'exercice 2

1) L'équation est de la forme $\dfrac{1}{x} = k$ avec $k = 7$. Comme $7 \neq 0$ alors l'équation admet une solution : $\dfrac{1}{7}$.
Ainsi $S = \left\{\dfrac{1}{7}\right\}$.

2) L'équation est de la forme $x^2 = k$ avec $k = 49$. Comme $49 > 0$ alors l'équation admet deux solutions : $-\sqrt{49}$ et $\sqrt{49}$.
Comme $-\sqrt{49} = -7$ et $\sqrt{49} = 7$ alors les solutions de l'équation peuvent s'écrire plus simplement : -7 et 7.
Ainsi, $S = \{-7\,;\,7\}$.

3) L'équation est de la forme $\sqrt{x} = k$. Comme $k = -13$ et $-13 < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution.
Ainsi, $S = \emptyset$.

4) L'équation est de la forme $x^3 = k$ avec $k = 125$.
Le nombre dont le cube est 125 est 5 car $5^3 = 125$.
Ainsi, $S = \{5\}$.

Corrigé de l'exercice 3

1) On isole x^3 dans le membre de gauche pour obtenir une équation du type $x^3 = k$.

$$9x^3 = 1125$$
$$x^3 = 125$$

L'équation est de la forme $x^3 = k$ avec $k = 125$.
Le nombre dont le cube est 125 est 5 car $5^3 = 125$.
Ainsi, $S = \{5\}$.

2) On isole $\sqrt{x}$ dans le membre de gauche pour obtenir une équation du type $\sqrt{x} = k$.

$$4\sqrt{x} - 4 = -4$$
$$4\sqrt{x} - 4 + 4 = -4 + 4$$
$$4\sqrt{x} = 0$$
$$\sqrt{x} = 0$$

L'équation est de la forme $\sqrt{x} = k$ avec $k = 0$. Comme $0 \geqslant 0$ alors l'équation admet une solution : $(0)^2 = 0$.
Ainsi $S = \{0\}$.

3) On isole $\dfrac{1}{x}$ dans le membre de gauche pour obtenir une équation du type $\dfrac{1}{x} = k$.

$$\frac{1}{x} - 4 = 2$$
$$\frac{1}{x} - 4 + 4 = 2 + 4$$
$$\frac{1}{x} = 6$$

$k = 6$ et $6 \neq 0$, donc l'équation est de la forme $\dfrac{1}{x} = k$ avec $k = 6$. Donc l'équation admet une solution : $\dfrac{1}{6}$.
Ainsi $S = \left\{\dfrac{1}{6}\right\}$.

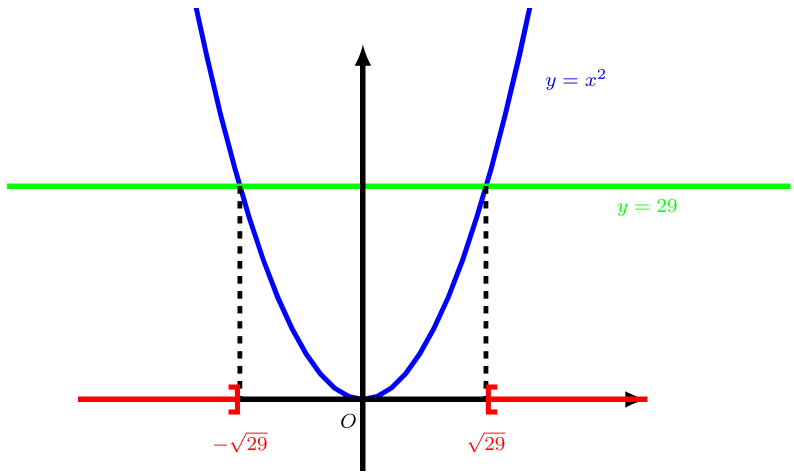
4) On isole x^2 dans le membre de gauche pour obtenir une équation du type $x^2 = k$.

$$-x^2 + 10 = 21$$
$$-x^2 + 10 - 10 = 21 - 10$$
$$-x^2 = 11$$
$$x^2 = -11$$

L'équation est de la forme $x^2 = k$ avec $k = -11$. Comme $-11 < 0$, l'équation n'a pas de solution.
Ainsi, $S = \emptyset$.

Corrigé de l'exercice 4

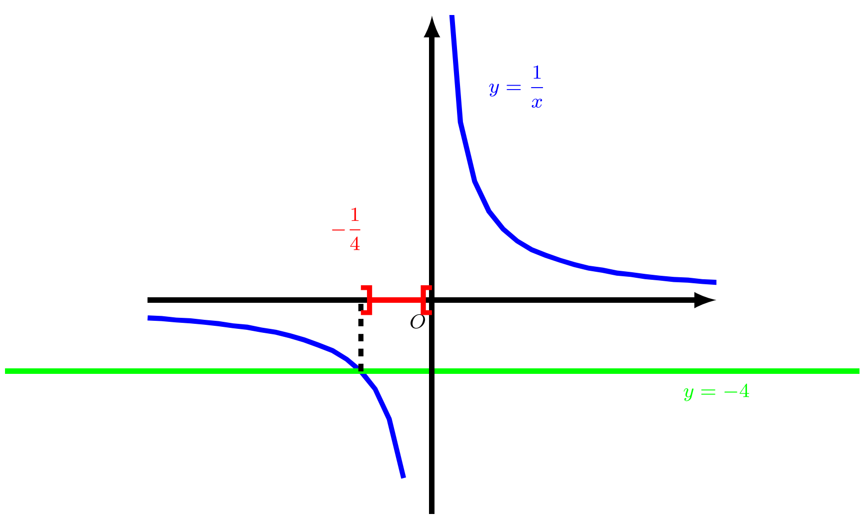
Pour résoudre graphiquement cette inéquation :
- On trace la parabole d'équation $y = x^2$.
- On trace la droite horizontale d'équation $y = 29$.
- Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de la courbe qui se situent sur ou au dessus de la droite.



Comme la fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 29$ est : $S =]-\infty\,;\,-\sqrt{29}] \cup [\sqrt{29}\,;\,+\infty[$.

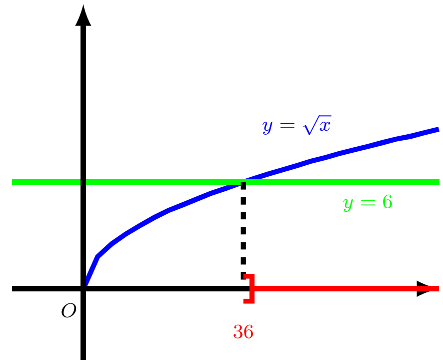
Corrigé de l'exercice 5

Pour résoudre graphiquement cette inéquation :
- On trace l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.
- On trace la droite horizontale d'équation $y = -4$. Cette droite coupe l'hyperbole en un point dont l'abscisse est : $-\dfrac{1}{4}$.
- Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de la courbe qui se situent strictement en dessous de la droite.



Comme la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$, 0 est une valeur interdite et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{x} < -4$ est : $S = \left]-\dfrac{1}{4}\,;\,0\right[$.

Corrigé de l'exercice 6
Pour résoudre graphiquement cette inéquation :
• On trace la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$.
• On trace la droite horizontale d'équation $y = 6$. Cette droite coupe la courbe en $6^2 = 36$.
• Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de la courbe qui se situent strictement au dessus de la droite.



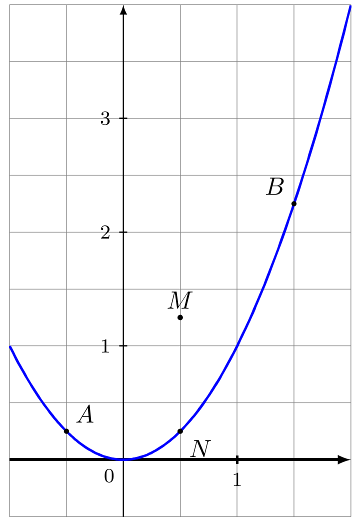
Comme la fonction racine carrée est définie sur $[0\,;\,+\infty[$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x} > 6$ est : $S =]36\,;\,+\infty[$.
Corrigé de l'exercice 7
Soit x un nombre réel. Raisonnons par disjonction des cas :

— Si $x \geqslant 0$, alors comme $x^2 = x \times x$, x^2 est le produit de deux nombres réels positifs ou nuls, donc x^2 est positif ou nul d'après la règle des signes d'un produit.

— Si $x < 0$, alors comme $x^2 = x \times x$, x^2 est le produit de deux nombres réels négatifs, donc x^2 est positif d'après la même règle.

Finalement, pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$.
Corrigé de l'exercice 8
On note f la fonction carré.
f est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $-x$ est aussi un réel donc $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
Pour tout réel x,
$$f(-x) = (-x)^2 = (-x) \times (-x) = x \times x = x^2 = f(x)$$
On en déduit alors que la fonction carré est paire.
Corrigé de l'exercice 9
On note f la fonction inverse.
f est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
Pour tout réel x non nul, $-x$ est aussi un réel non nul donc $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0.
Pour tout réel x non nul,
$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$
On en déduit alors que la fonction inverse est impaire.
Corrigé de l'exercice 10
On effectue un raisonnement par l'absurde.
On suppose donc que la fonction inverse s'annule sur $\mathbb{R}^*$.
Cela signifie qu'il existe un réel non nul x tel que $\frac{1}{x} = 0$.
Comme x est un réel non nul, en multipliant chaque membre de l'égalité par x, on obtient :
$$x \times \frac{1}{x} = x \times 0$$
c'est-à-dire
$$1 = 0$$
ce qui est absurde.
L'hypothèse que l'on a faite au départ est donc fausse et donc, la fonction inverse ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.
Corrigé de l'exercice 11

1) On place les points A et B sur la courbe :



2) Le point A a pour ordonnée $(-0{,}5)^2 = 0{,}25$ et donc pour coordonnées $(-0{,}5\ ;\ 0{,}25)$.
Le point B a pour ordonnée $1{,}5^2 = 2{,}25$ et donc pour coordonnées $(1{,}5\ ;\ 2{,}25)$.
M est le milieu du segment $[AB]$ donc M a pour coordonnées $\left(\dfrac{-0{,}5+1{,}5}{2}\ ;\ \dfrac{0{,}25+2{,}25}{2}\right) = (0{,}5\ ;\ 1{,}25)$.
N est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0,5 donc son ordonnée est $0{,}5^2 = 0{,}25$.
Finalement, on a $M(0{,}5\ ;\ 1{,}25)$ et $N(0{,}5\ ;\ 0{,}25)$

3) $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(0{,}5-0{,}5)^2 + (0{,}25-1{,}25)^2} = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$

Corrigé de l'exercice 12

1) Cela revient à résoudre l'équation $x^2 = 36$.
Comme $36 > 0$, alors l'équation admet deux solutions : $-\sqrt{36}$ et $\sqrt{36}$.
Or, $\sqrt{36} = 6$ donc les solutions de l'équation sont 6 et -6.
Il y a deux nombres réels dont le carré est 36 : -6 et 6.

2) La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
Tous les nombres réels non nuls ont un inverse.
0 est donc le quel nombre réel qui n'a pas d'inverse.

3) Comme $5 > 0$, l'équation $x^2 = 5$ admet deux solutions : $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.
Or, $-\sqrt{5} < 0$ et $\sqrt{5} > 0$ donc $-\sqrt{5}$ est le seul nombre négatif dont le carré est 5.

4) Comme $4 \geqslant 0$, l'équation $\sqrt{a} = 4$ admet une seule solution : $a = 4^2 = 16$.

5) Comme $7 > 0$, l'équation $x^2 = 7$ admet deux solutions : $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$.
Or, $-\sqrt{7} < 0$ et $\sqrt{7} > 0$ donc $-\sqrt{7}$ est un nombre négatif dont le carré est 7.

6) $5 \times \dfrac{1}{5} = 1$ donc $\dfrac{1}{5}$ a pour inverse 5.

7) Comme $4 \geqslant 0$, l'équation $\sqrt{x} = 4$ admet une seule solution : $x = 4^2 = 16$.
16 a donc pour racine carrée 4.

8) Pour tout nombre réel x, $x^2 \geqslant 0$, et comme $-1 < 0$ alors il n'existe pas de nombre réel x tel que $x^2 = -1$.

9) Cela revient à résoudre l'équation $x^2 = 10$.
Comme $36 > 0$, alors l'équation admet deux solutions : $-\sqrt{10}$ et $\sqrt{10}$.
Donc il y a deux nombres réels dont le carré est 10 : $-\sqrt{10}$ et $\sqrt{10}$.

10) Pour tout réel x supérieur ou égal à 0, $\sqrt{x}$ est également un réel supérieur ou égal à 0.
Comme $-1 < 0$ alors il n'existe pas de réels x tel que $\sqrt{x} = -1$

11) Comme $10 \geqslant 0$, l'équation $\sqrt{x} = 10$ admet une seule solution : $x = 10^2 = 100$.
100 est l'unique nombre dont la racine carrée est 10.

12) $2 \times 0{,}5 = 1$ donc 2 a pour inverse 0,5.

Corrigé de l'exercice 13

Les coordonnées de A sont de la forme $(x; 9)$ avec $x^2 = 9$.
Comme $9 > 0$, alors l'équation admet deux solutions : $-\sqrt{9}$ et $\sqrt{9}$.
Or, $\sqrt{9} = 3$ donc les solutions de l'équation sont 3 et -3.
Or, l'abscisse du point A est négative donc A a pour abscisse -3.

De même, les coordonnées de B sont de la forme $(x; 25)$.
Comme $25 > 0$, alors l'équation admet deux solutions : $-\sqrt{25}$ et $\sqrt{25}$.
Or, $\sqrt{25} = 5$ donc les solutions de l'équation sont 5 et -5.
Or, l'abscisse du point B est négative donc B a pour abscisse 5.

Finalement, l'écart entre les abscisses des points A et B est $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$.