Fonctions : variations et extremum (Correction) — Seconde

Corrigé de l'exercice 1
La fonction w est définie sur $[-4\,;\,7]$.
Son tableau de variations est :

x	-4		0		3		4		7
$w(x)$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-5

Corrigé de l'exercice 2

1) On doit comparer les carrés de deux nombres. On utilise donc la fonction carré.
La fonction carré étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, elle conserve l'ordre. Cela signifie que deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.
Autrement dit, si a et b sont deux nombres positifs et si $a < b$, alors $a^2 < b^2$.
Comme $1{,}843 < 1{,}851$, alors $1{,}843^2 < 1{,}851^2$.

2) On doit comparer les carrés de deux nombres. On utilise donc la fonction carré.
La fonction carré étant strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, elle change l'ordre.
Cela signifie que deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs carrés.
Autrement dit, si a et b sont deux nombres négatifs et si $a < b$, alors $a^2 > b^2$.
Comme $-0{,}863 < -0{,}851$, alors $(-0{,}863)^2 > (-0{,}851)^2$

Corrigé de l'exercice 3

1) On doit comparer les inverses de deux nombres. On utilise donc la fonction inverse.
La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, elle change l'ordre. Cela signifie que deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs inverses.
Autrement dit, si a et b sont deux nombres strictement positifs et si $a < b$, alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.
Comme $4{,}9 < 5{,}1$, alors $\dfrac{1}{4{,}9} > \dfrac{1}{5{,}1}$

2) On doit comparer $-\dfrac{1}{8{,}9}$ et $-\dfrac{1}{9{,}5}$ soit $\dfrac{1}{-8{,}9}$ et $\dfrac{1}{-9{,}5}$, c'est-à-dire les inverses de deux nombres (négatifs). On utilise donc la fonction inverse.
La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]-\infty;0[$, elle change l'ordre. Cela signifie que deux nombres strictement négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs inverses.
Autrement dit, si a et b sont deux nombres strictement négatifs et si $a < b$, alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.
Comme $-9{,}5 < -8{,}9$, alors $\dfrac{1}{-9{,}5} > \dfrac{1}{-8{,}9}$

Corrigé de l'exercice 4

1) On doit comparer les racines carrées de deux nombres. On utilise donc la fonction racine carrée.
La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, elle conserve l'ordre. Cela signifie que deux nombres réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.
Autrement dit, si a et b sont deux nombres réels positifs et si $a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
Comme $5{,}7 < 6{,}1$, alors $\sqrt{5{,}7} < \sqrt{6{,}1}$.

2) On doit comparer les racines carrées de deux nombres. On utilise donc la fonction racine carrée.
La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, elle conserve l'ordre. Cela signifie que deux nombres réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.
Autrement dit, si a et b sont deux nombres réels positifs et si $a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
Comme $5{,}8 < 6$, alors $\sqrt{5{,}8} < \sqrt{6}$.

Corrigé de l'exercice 5

1) On doit comparer les cubes de deux nombres. On utilise donc la fonction cube.
La fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle conserve l'ordre. Cela signifie que deux nombres réels sont rangés dans le même ordre que leurs cubes.
Autrement dit, si a et b sont deux nombres réels et si $a < b$, alors $a^3 < b^3$.
Comme $-0{,}9 < 10{,}8$, alors $(-0{,}9)^3 < 10{,}8^3$.

2) On doit comparer les cubes de deux nombres. On utilise donc la fonction cube.
La fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle conserve l'ordre. Cela signifie que deux nombres réels sont rangés dans le même ordre que leurs cubes.
Autrement dit, si a et b sont deux nombres réels et si $a < b$, alors $a^3 < b^3$.
Comme $-0{,}7 < 1{,}4$, alors $(-0{,}7)^3 < 1{,}4^3$.

Corrigé de l'exercice 6

1) $x \geqslant 6$ signifie $x \in [6; +\infty[$.
Puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, on obtient son tableau de variations sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

x	6		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\searrow$	

On constate que le maximum de $\dfrac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ est $\dfrac{1}{6}$.
On en déduit que si $x \geqslant 6$ alors, $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{6}$.
Remarque : la fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, elle change l'ordre.
Ainsi, les antécédents et les images sont rangés dans l'ordre inverse.
Si $x \geqslant 6$ alors, $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{6}$.

2) $-5 < x \leqslant -2$ signifie $x \in]-5; -2]$.
Puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, on obtient son tableau de variations sur l'intervalle $[-5; -2]$:

x	-5		-2
$f(x)$	$-\frac{1}{5}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

On constate que le minimum de $\dfrac{1}{x}$ sur $[-5; -2]$ est $-\dfrac{1}{2}$ et son maximum est $-\dfrac{1}{5}$.
On en déduit que si $-5 < x \leqslant -2$ alors, $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{5}$.
Remarque : la fonction inverse étant strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$, elle change l'ordre.
Ainsi, les antécédents et les images sont rangés dans l'ordre inverse.
Si $-5 < x \leqslant -2$ alors, $-\dfrac{1}{5} > \dfrac{1}{x} \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 7

1) $x > 36$ signifie $x \in]36; +\infty[$.
Puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on obtient son tableau de variations sur l'intervalle $[36; +\infty[$:

x	36		$+\infty$
$f(x)$	6	$\nearrow$	

On constate que le minimum de $\sqrt{x}$ sur $[36; +\infty[$ est 6.
On en déduit que si $x > 36$ alors, $\sqrt{x} \geqslant 6$.
Remarque : la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0 + \infty[$, elle conserve l'ordre.
Ainsi, les antécédents et les images sont rangés dans le même ordre :
Si $x > 36$ alors, $\sqrt{x} > 6$.

2) $32 \leqslant x \leqslant 48$ signifie $x \in [32;48]$.
Puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on obtient son tableau de variations sur l'intervalle $[32;48]$:

x	32		48
$f(x)$	$\sqrt{32}$	$\nearrow$	$\sqrt{48}$

On constate que le minimum de $\sqrt{x}$ sur $[32;48]$ est $\sqrt{32}$ et son maximum est $\sqrt{48}$.
On en déduit que si $32 \leqslant x \leqslant 48$ alors, $\sqrt{32} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{48}$.
Remarque : la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0+\infty[$, elle conserve l'ordre.
Ainsi, les antécédents et les images sont rangés dans le même ordre :
Si $32 \leqslant x \leqslant 48$ alors, $\sqrt{32} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{48}$.

Corrigé de l'exercice 8

D'après le tableau de variations, la fonction f est décroissante sur $[8;17]$.
De plus, $10 \in [8;17]$, $15 \in [8;17]$ et $10 < 15$.

x	-6		8		10		15		17
$f(x)$	-12	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$f(10)$	$\searrow$	$f(15)$	$\searrow$	-10

On sait que si une fonction est décroissante sur un intervalle $[a;b]$, alors ses antécédents et ses images sont rangés dans l'ordre inverse.
Cela signifie que pour tout $x_1 \in [a;b]$ et $x_2 \in [a;b]$, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.

Par conséquent, comme $10 < 15$, alors $f(10) > f(15)$.

Corrigé de l'exercice 9

• f admet un maximum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant f(a)$.
Le nombre $f(a)$ est le maximum de f sur I.
• f admet un minimum en b sur un intervalle I signifie que pour tout réel x de I, $f(x) \geqslant f(b)$.
Le nombre $f(b)$ est le minimum de f sur I.

Pour tout réel x de $[6;17]$, on a $f(x) \geqslant -12$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant f(16)$.
Ainsi, le minimum de f est -12. Il est atteint en $x = 16$.
Pour tout réel x de $[6;17]$, on a $f(x) \leqslant -3$, c'est-à-dire $f(x) \leqslant f(15)$.
Ainsi, le maximum de f est -3. Il est atteint en $x = 15$.

Corrigé de l'exercice 10

1) Sur $[-13;-3]$, le minimum de f est 2 et le maximum est 5.
Ainsi, pour $x \in [-13;-3]$, $\quad 2 \leqslant f(x) \leqslant 5$.

2) Sur $[-8;19]$, le minimum de f est -3 et le maximum est 3.
Ainsi, pour $x \in [-8;19]$, $\quad -3 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

Corrigé de l'exercice 11

1) On reconnaît que h est une fonction affine, de la forme $h(x) = ax + b$, avec $a = 10$ et $b = -6$.
On sait qu'une fonction affine est monotone sur $\mathbb{R}$.
Son sens de variation dépend du signe de a.
Comme $a = 10 > 0$, la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $h(-3) = 10 \times (-3) - 6 = -36$ et $h(5) = 10 \times 5 - 6 = 44$.
On obtient ainsi le tableau de variations :

x	-3		5
$h(x)$	-36	$\nearrow$	44

2) On reconnaît que u est une fonction affine, de la forme $u(x) = ax + b$, avec $a = \dfrac{5}{4}$ et $b = \dfrac{3}{4}$.
On sait qu'une fonction affine est monotone sur $\mathbb{R}$.
Son sens de variation dépend du signe de a.
Comme $a = \dfrac{5}{4} > 0$, la fonction u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On peut synthétiser cela dans un tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$u(x)$	$\nearrow$	

Corrigé de l'exercice 12

1) a) h est une fonction affine. Elle s'écrit donc sous la forme $h(x) = ax + b$.
Puisque h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, les images sont d'abord négatives, puis positives.
Sachant que h s'annule en 13, le changement de signe intervient donc en $x = 13$.
On obtient ainsi le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		13		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

b) La fonction doit vérifier les trois conditions :
• être une fonction affine ;
• être strictement croissante ;
• s'annuler en 13.
Comme h est une fonction croissante, on doit choisir un coefficient directeur a positif.
Prenons $a = 1$.
h est alors de la forme : $h(x) = x + b$.
On cherche maintenant b :
Comme on sait que : $h(13) = 0$, on en déduit : $h(13) = 13 + b = 0$.
d'où $b = -13$.
On obtient la fonction h définie par $h(x) = x - 13$.
En partant d'une autre valeur pour a, on aurait obtenu une autre expression pour h.
Il existe une infinité de fonctions qui possèdent ces trois propriétés.
Toutes les fonctions de la forme $h(x) = k \times (x - 13)$ avec k un réel non-nul est solution de l'exercice.

2) a) D'après le tableau de signes, les images sont d'abord positives, puis négatives.
On en déduit que la fonction w est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
b) Comme w est une fonction affine strictement décroissante, les antécédents et les images sont rangées dans l'ordre inverse.
Comme $-3 < -2$, alors $w(-3) > w(-2)$.

Corrigé de l'exercice 13

Partie A

1) Il provient du calcul d'une image. C'est l'image de 10 par la fonction f.
2) Il suffit de vérifier que l'image de 13 par la fonction f est 218 :
$f(13) = 2 \times 13^2 - 40 \times 13 + 400 = 218$.
3) **Affirmation 1 :** Vrai. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[13; 20]$. Alors ses antécédents et ses images sont rangés dans le même ordre. Ainsi, si $x > 13$ alors $f(x) > f(13)$ et donc $f(x) > 218$.
Affirmation 2 : Faux. $f(0) = 400$ donc $f(0) > 218$ mais $0 < 13$.

Partie B

1) Le premier morceau pèse 13 grammes donc sa valeur est $13^2 = 169$ euros.

Le second morceau pèse $20 - 13 = 7$ grammes et sa valeur est donc $7^2 = 49$ euros.
La valeur totale des deux morceaux est donc $169 + 49 = 218$ euros.
2) Si x est la masse d'un morceau, alors la masse du second morceau est $20 - x$.

La valeur totale des deux morceaux est :

$$\begin{aligned}
x^2 + (20 - x)^2 &= x^2 + 20^2 - 2 \times 20 \times x + x^2 \\
&= x^2 + 400 - 40x + x^2 \\
&= 2x^2 - 40x + 400 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

3) a) Vrai. D'après le tableau de variations de la fonction f, la valeur totale est minimale lorsque $x = 10$. Dans ce cas, le second morceau a une masse égale à $20 - 10 = 10$. Donc, la valeur totale est minimale lorsque la pierre se brise en deux morceaux de même masse.

   b) Faux. Si la pierre ne se brise pas, alors la valeur est égale à $20^2 = 400$. Or, le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$ est 400. Cela signifie que, $f(x) \leqslant 400$ pour tout nombre x de $[0; 20]$.

   Ainsi, il ne peut pas être avantageux pour le propriétaire que celle-ci se casse en deux morceaux.

Corrigé de l'exercice 14

1) a) L'image de 0 par la fonction f est 5.

   b) L'image de 10 par la fonction f est 3 (le point M est en C).

   c) 13

2) Tableau de variation de f :

x	0		3		6		13		20
$f(x)$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	5