MATHEMATIQUES
QCM de géométrie sans repère

Exercice 1

1. • Le triangle est isocèle en A car $AB = AC$.
• $[BC]$ est un diamètre du cercle et A est un point de ce cercle. On en déduit que le triangle ABC est rectangle en A.

Réponse : ☒ rectangle ☒ isocèle.

2. Le triangle ABC étant rectangle en A, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 \\ 4^2 + 4^2 &= BC^2 \\ BC^2 &= 16 + 16 \\ BC^2 &= 32 \\ BC &= \sqrt{32} \end{aligned}$$

Rappel ?
Le cercle circonscrit est le cercle qui passe par les 3 sommets. Son rayon est donné ici par la longueur $[OA]$.

On en déduit que le rayon est égal à $\sqrt{32} \simeq 2,8$.
Réponse : ☒ environ 2,8.

3. • La droite (OA) passe par le milieu de $[BC]$, on en déduit que c'est une médiane.
• La triangle ABC est isocèle en A et O est le milieu de $[BC]$, donc $(OA) \perp (BC)$. On en déduit que (OA) est une hauteur.
• (OA) passe par le milieu de $[BC]$ et est perpendiculaire à (BC), on en déduit que (OA) est une médiatrice.

Réponse : ☒ une médiane ☒ une hauteur ☒ une médiatrice.

4. • Un losange est un parallélogramme.
• Dans un losange, les côtés ne sont pas forcément perpendiculaires.

Rappel ?
Un losange possède toutes les propriétés du parallélogramme.

• Un losange est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur.

Encore ?
Si deux côtés consécutifs dans un parallélogramme sont de même longueur, alors les quatre côtés sont de même longueur.

Réponse : ☒ un parallélogramme

5. • D'après la figure, le quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. C'est donc un parallélogramme. De plus, ses diagonales sont perpendiculaires, c'est donc un losange.

Encore ?
Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

• Dans le triangle AOB rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 &= AB^2 \\ 4^2 + 3^2 &= AB^2 \\ AB^2 &= 16 + 9 \\ AB^2 &= 25 \\ AB &= \sqrt{25} \\ AB &= 5 \end{aligned}$$

Toujours ?
Quand on utilise le théorème de Pythagore, on le cite et on donne le triangle dans lequel on l'utilise.

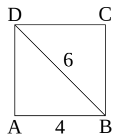
- Le losange est constitué de 4 triangles rectangles de même aire : $\dfrac{4\times 3}{2} = 6$.

On en déduit que son aire est $4 \times 6 = 24$.

Réponse : ☒ $ABCD$ est un losange ☒ $AB = 5$ ☒ L'aire de $ABCD$ est 24.

Exercice 2

1. Faux. Si un tel carré existait, on aurait un carré $ABCD$ comme représenté ci-contre :



Le triangle ABD serait rectangle et isocèle en A avec $AB = AD = 4$ et $BD = 6$.

Or :

- $BD^2 = 6^2 = 36$.
- $AB^2 + AD^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$

Contraposée
La propriété utilisée ici est la contraposée du théorème de Pythagore.

On a donc $BD^2 \neq AB^2 + AD^2$, le théorème de Pythagore n'est pas vérifié, donc le triangle n'est pas rectangle. On en déduit qu'un tel carré n'existe pas !

2. Faux. 5 étant la plus grande longueur, si le triangle est rectangle, c'est la longueur de l'hypoténuse.
Or :
- $5^2 = 25$.
- $3^2 + \sqrt{8})^2 = 9 + 8 = 17$

D'où $3^2 + \sqrt{8})^2 \neq 5^2$

D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.

3. Faux. La longueur du segment joignant les deux milieux des côté d'un triangle est égal à la moitié du troisième côté. Or 5 n'est pas la moitié de 7. En réalité, $AC = 2 \times IJ = 10$ cm.

4. Vrai. Le périmètre d'un carré de côté a est : $4a$.
Le périmètre d'un carré de côté $a + 1$ est $4(a + 1) = 4a + 4$.
Le périmètre augmente donc bien de 4 cm.

5. Vrai. L'aire d'un carré de côté a est a^2.
L'aire d'un carré de côté $a + 1$ est :

$$(a + 1)^2 = (a + 1)(a + 1) = a^2 + a + a + 1 = a^2 + 2a + 1$$

L'aire augmente donc bien de $2a + 1$ cm.

Egalité remarquable
On peut utiliser l'égalité remarquable (si vous la connaissez !) :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$