

MATHEMATIQUES
Calcul littéral - Equations : entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

1. On procède par étape :

- Le véhicule consomme 8 litres pour 100 km, soit 0,08 litres pour 1 km.

- $0,08 \times 120 = 9,6$.

Pour 120 km, le véhicule aura consommé 9,6 litres d'essence.

- $9,6 \times 1,5 = 14,4$.

Le coût pour le carburant est de 14,40 €.

- $14,4 + 90 = 104,4$.

Au total, Nabolos aura déboursé 104,4 € pour sa location du week-end.

- $\frac{104,4}{120} = 0,87$.

Le prix de revient pour un km est 0,87 €.

2. a. En raisonnant comme dans la question précédente mais avec x km parcourus pendant le week-end, on obtient :

- $0,08x$.

La quantité d'essence consommée pour x est $0,08x$ litres.

- $1,5 \times 0,08x = 0,12x$.

Le coût pour le carburant est de $0,12x$ €.

- $0,12x + 90$.

Au total, Nabolos débourse $0,12x + 90$ € pour sa location du week-end s'il parcourt x km.

- $\frac{0,12x + 90}{x}$.

En moyenne, le coût par km est $f(x) = \frac{0,12x + 90}{x}$.

b. $f(x) = \frac{0,12x + 90}{x} = \frac{0,12x}{x} + \frac{90}{x} = 0,12 + \frac{90}{x}$.

Plus x augmente, plus $\frac{90}{x}$ diminue et donc plus le coût au km diminue.

Ainsi, on peut dire que la fonction f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

3. a. On cherche x de façon que $f(x) = 0,52$.

On est donc amené à résoudre l'équation suivante dans $]0 ; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \frac{0,12x + 90}{x} &= 0,52 && \text{On fait un produit en croix.} \\ 0,52x &= 0,12x + 90 \\ 0,52x - 0,12x &= 90 \\ 0,4x &= 90 \\ x &= \frac{90}{0,4} \\ x &= 225 \end{aligned}$$

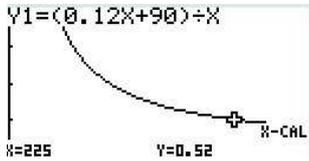
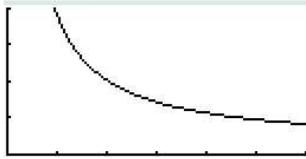
Le client a parcouru 225 km durant le week-end.

Pensez-y !

On sait déjà que ce nombre de km est plus grand que 120 car pour 120 km, le prix de revient au km est 0,87 et comme la fonction f est décroissante alors $x > 120$.

b. $225 \times 0,52 = 117$.

Le coût total est de 117 € pour cette location.



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = 0$, $X_{Max} = 300$, $X_{Scale} = 50$, $Y_{Min} = 0$, $Y_{Max} = 2$ et $Y_{Scale} = 0,5$. Avec le solveur graphique Gsolv et la fonction $\overline{R-CAL}$, on obtient l'antécédent de 0,52 qui est 225 comme nous l'avons trouvé par le calcul. On remarque également que la fonction f est bien décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 2

1. • Avec $a = 2$ et $b = 4$, on obtient :

$(a + b)^2 = (2 + 4)^2 = 6^2 = 36$, donc $A = 36$.

$(a - b)^2 = (2 - 4)^2 = (-2)^2 = 4$, donc $B = 4$.

$A - B = 36 - 4 = 32$.

$\frac{1}{4} \times 32 = 8$.

• Avec $a = -5$ et $b = 3$, on obtient :

$(a + b)^2 = (-5 + 3)^2 = (-2)^2 = 4$, donc $A = 4$.

$(a - b)^2 = (-5 - 3)^2 = (-8)^2 = 64$, donc $B = 64$.

$A - B = 4 - 64 = -60$.

$\frac{1}{4} \times (-60) = -15$.

2. Pour démontrer cette conjecture, on utilise un calcul littéral.

On note les deux nombres choisis a et b . On obtient :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, donc $A = a^2 + 2ab + b^2$.

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, donc $B = a^2 - 2ab + b^2$.

Pensez-y !

Vérifiez les résultats obtenus dans la première question.

Le produit de a par b dans le premier exemple donne bien 8 et dans le deuxième, -15.

$$\begin{aligned} A - B &= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2} \\ &= 4ab \end{aligned}$$

$\frac{1}{4} \times 4ab = ab$.

On vient de prouver que le résultat final est bien le produit des deux nombres de départ.

Exercice 3

On calcule le carré de p :

$$\begin{aligned} p^2 &= (2n + 1)^2 \\ &= (2n)^2 + 2 \times 2n \times 1 + 1^2 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 2(2n + 2) + 1 \end{aligned}$$

Impair

Pour montrer qu'un entier est impair, on montre qu'il s'écrit $2 \times N + 1$ avec N entier.

Par conséquent, p^2 s'écrit $2 \times N + 1$ avec $N = 2n + 2$. Le carré d'un nombre entier positif impair est bien impair.

Exercice 4

1. $AB = 4 + 8 = 12$ et $AC = 4 + 7 = 11$.

Le plus grand côté de ce triangle est AB . Donc si ce triangle est rectangle, il ne peut l'être qu'en C .

$$AB^2 = 12^2 = 144.$$

$$AC^2 + BC^2 = 11^2 + 5^2 = 121 + 25 = 136.$$

On a donc $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$.

On en déduit que le triangle ABC n'est pas rectangle.

Contraposée

C'est la contraposée du théorème de Pythagore qui permet d'affirmer que le triangle n'est pas rectangle.

Si vous êtes fort

Avec un peu d'entraînement, vous pouvez développer directement sans écrire les calculs intermédiaires.

2.a. • $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$

• $(x + 8)^2 = x^2 + 16x + 64$

b. Le plus grand côté du triangle ABC est $[AB]$. Donc si le triangle ABC est rectangle il ne peut l'être qu'en C .

$$AB^2 = (x + 8)^2 = x^2 + 16x + 64.$$

$$AC^2 + BC^2 = (x^2 + 14x + 49) + 5^2 = x^2 + 14x + 74.$$

Le triangle ABC est rectangle lorsque $AB^2 = AC^2 + BC^2$ soit $x^2 + 16x + 64 = x^2 + 14x + 74$.

$$\begin{aligned}x^{\cancel{2}} + 16x + 64 &= x^{\cancel{2}} + 14x + 74 \\16x + 64 &= 14x + 74\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}16x - 14x &= 74 - 64 \\2x &= 10 \\x &= \frac{10}{2} \\x &= 5\end{aligned}$$

Lorsque $x = 5$, le triangle ABC est rectangle en C . Les longueurs des côtés sont alors : $AB = 13$, $AC = 12$ et $BC = 5$.