MATHEMATIQUES
Droites et systèmes : entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

1. On utilise le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine pour déterminer les équations réduites des droites :
On trouve $d_1 \ : \ y = x + 4$ et $d_2 \ : \ y = 2x - 3$.

Une équation cartésienne de d_1 est : $-x + y - 4 = 0$.

Une équation cartésienne de d_2 est : $-2x + y + 3 = 0$.

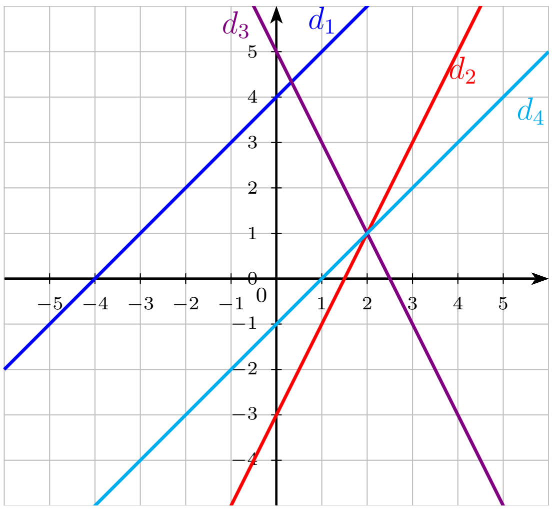
Pensez-y !
Un point appartient à une droite si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

2. a. Pour $x = -1$ et $y = -2$, on obtient $2 \times (-2) - 2 \times (-1) + 2 = -4 + 2 + 2 = 0$.
On en déduit que le point A est sur d_4.

b.
Le coefficient directeur de la droite d_1 est 1.
On écrit l'équation de la droite d_4 sous forme réduite pour obtenir son coefficient directeur. On obtient $d_4 \ : \ y = x - 1$.
Son coefficient directeur est aussi 1.
On en déduit que d_1 et d_4 sont parallèles.

Pensez-y !
Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

c. Pour $d_4 \ : \ y = x - 1$, le coefficient directeur est 1 et l'ordonnée à l'origine est -1. De plus, d_4 doit passer par le point A et être parallèle à la droite d_1. On ne doit pas se tromper avec ça ....
En écrivant d_3 sous forme réduite, on obtient : $y = -2x + 5$. Le coefficient directeur est -2 et l'ordonnée à l'origine est 5.



d. Les coordonnées du point d'intersection sont solutions du système : $\begin{cases} -x + y - 4 = 0 \\ -2x + y + 3 = 0 \end{cases}$.

Par différence, on obtient :

$$\begin{aligned} (-x + y - 4) - (-2x + y + 3) &= 0 \\ -x + \cancel{y} - 4 + 2x - \cancel{y} - 3 &= 0 \\ x - 7 &= 0 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

En remplaçant x par 7 dans la première équation,
on obtient $-7 + y - 4 = 0$ soit $y = 11$.

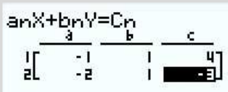
Les coordonnées du point d'intersection entre d_1 et d_2 sont $(7\ ;\ 11)$.

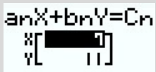
Pensez au graphique

Vérifiez la cohérence de ce résultat avec le graphique.

Calculatrice

Après avoir sélectionné le menu EQUA, puis F1:Système par F1, on sélectionne le nombre d'inconnues (2) par F1.
On entre les valeurs de a, b et c. Attention le système doit être sous cette forme pour identifier les valeurs de a, b et c : $\begin{cases} -x + y = 4 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$. L'affichage est :





3. La droite Δ est parallèle à la droite d_4. Elles ont donc le même coefficient directeur soit : 1. On en déduit que l'équation réduite de la droite Δ est de la forme $y = x + p$.
Le point B étant sur Δ, ses coordonnées vérifient cette équation soit : $-3 = 2 + p$ d'où $p = -5$.
On obtient finalement : $\Delta\ :\ y = x - 5$ ou $\Delta\ :\ -x + y + 5 = 0$

Exercice 2

Soit $M(x\,;\,y)$ le point d'intersection des droites (AB) et d d'équation $y = 1$.
On déduit tout de suite que le point M a pour ordonnée 1 car $M \in d$ donc $M(x\,;\,1)$.

De plus, les points A, M et B sont alignés car $M \in (AB)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont donc colinéaires.

On utilise alors le critère de colinéarité, à l'aide des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned} 5(x+2) - 6 \times 4 = 0 &\iff 5x + 10 - 24 = 0 \\ &\iff 5x - 14 = 0 \\ &\iff 5x = 14 \\ &\iff x = \frac{14}{5} = 2{,}8 \end{aligned}$$

On conclut alors que le point M a pour coordonnées $(2{,}8\,;\,1)$.

Autre méthode

On détermine une équation de la droite (AB), puis on cherche l'abscisse de cette droite ayant pour ordonnée 1.

- La droite (AB) admet pour équation cartésienne une équation du type $ax + by + c = 0$ avec a, b et c trois réels non tous nuls. De plus le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.
En identifiant les coordonnées de $\vec{u}$ avec $\overrightarrow{AB}$, on trouve donc $a = 5$ et $b = -6$.
On cherche donc le réel c tel que $5x - 6y + c = 0$:

$$\begin{aligned} B \in (AB) &\iff 5x_A - 6y_A + c = 0 \\ &\iff 5 \times 4 - 6 \times 2 + c = 0 \\ &\iff c = -8. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est donc $5x - 6y - 8 = 0$.

- Pour $y = 1$, on obtient : $5x - 6 - 8 = 0$, soit $x = \dfrac{14}{5} = 2,8$.

Le point M a pour coordonnées (2,8 ; 1).

Exercice 3

1. On traduit les deux égalités :
$f(-1) = -5$ s'écrit $a \times (-1) + b = -5$
et $f(2) = 1$ s'écrit $a \times 2 + b = 1$

On en déduit que les nombres a et b vérifient les égalités : $-a + b = -5$ et $2a + b = 1$.

2. Les nombres a et b vérifient simultanément les deux égalités. Ils forment donc la solution du système : $\begin{cases} -a + b = -5 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$.

On résout ce système par substitution en exprimant b en fonction de a dans la première équation : $b = a - 5$.
On remplace b par $a + 5$ dans la deuxième équation, puis on résout :

$$\begin{cases} b = a - 5 \\ 2a + (a - 5) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = a - 5 \\ 3a = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} b = a - 5 \\ a = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2 - 5 \\ a = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

Conclusion : La fonction f s'écrit $f(x) = 2x - 3$.

Exercice 4

1. On utilise la méthode de substitution pour résoudre ce système. On exprime y en fonction de x dans la première équation : $y = 8 - 2x$. On remplace y par $8 - 2x$ dans la deuxième équation puis on résout :

$$\begin{cases} y = 8 - 2x \\ -3x + (8 - 2x) = -17 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 8 - 2x \\ -5x + 8 = -17 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 8 - 2x \\ -5x = -25 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 8 - 2x \\ x = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 8 - 2 \times 5 \\ x = 5 \end{cases} \iff$$
$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 5 \end{cases}$$

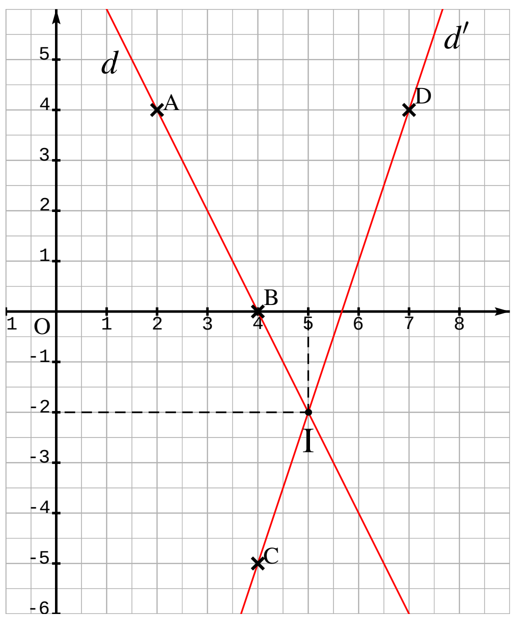
La solution du système est le couple : $(5\ ;\ -2)$.

2. a. On exprime y en fonction de x dans chacune des deux équation :
$y = -2x + 8$ et $y = 3x - 17$.

Pensez aux équations réduites

Quand c'est simple comme ici, écrivez les équations sous forme réduite.

On trace les droites d et d'.



Explications

Pour représenter une droite, on calcule les coordonnées de deux points.

- Pour la droite d :

Si $x = 2$, $y = -2 \times 2 + 8 = 4$, d'où $A(2\ ;\ 4)$.
Si $x = 4$, $y = -2 \times 4 + 8 = 0$, d'où $B(4\ ;\ 0)$.

- Pour la droite d' :

Si $x = 4$,$y = 3 \times 4 - 17 = -5$, d'où $C(4\ ;\ -5)$.
Si $x = 7$, $y = 3 \times 7 - 17 = 4$, d'où $D(7\ ;\ -4)$.

c. La solution du système est donnée par les coordonnées du point d'intersection I des droites d et d'. On lit $(5\ ;\ -2)$ ce qui correspond bien à la solution trouvée précédemment.

Exercice 5

- $5\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{\cancel{5}\times 3}{\cancel{5}}+\dfrac{2\times 2}{3}=3+\dfrac{4}{3}=\dfrac{12}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{16}{3}$.
- $\dfrac{3}{5}\times 2-3\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{3\times 2}{5}-\dfrac{\cancel{3}\times 2}{\cancel{3}}=\dfrac{6}{5}-2=\dfrac{6}{5}-\dfrac{10}{5}=\dfrac{-4}{5}$.

2. En remplaçant x par $\dfrac{3}{5}$ et y par $\dfrac{2}{3}$ dans les calculs précédents, on obtient :
$5x+2y$ et $2x-3y$.
En utilisant les calculs précédents, on obtient le système :

$$\begin{cases} 5x+2y=\dfrac{16}{3} \\ 2x-3y=-\dfrac{4}{5} \end{cases}$$