MATHEMATIQUES
Droites et systèmes : entraînement savoir-faire 2 (corrigé)

Exercice 1

Méthode

Deux droites du plan sont soit parallèles (éventuellement confondues) soit sécantes.

Pour étudier la position relative de deux droites :

- Si les équations des droites sont données sous forme réduite :

Si elles ont le même coefficient directeur, elles sont parallèles. Cela signifie que le système d'équations formé par les deux équations des droites n'admet aucune solution.
Si, en plus l'ordonnée à l'origine est la même elles sont confondues. Cela signifie que le système d'équations formé par les deux équations des droites a une infinité de solution.

Sinon elles sont sécantes : cela signifie que le système d'équations formé par les deux équations des droites admet une unique solution (les coordonnées du point d'intersection).

- Si les équations des droites sont données sous forme cartésienne :

On peut les écrire sous forme réduite en isolant y dans chacune des équations et se ramener à la méthode précédente.
ou

On étudie la colinéarité des vecteurs directeurs de chacune des droites (en calculant le déterminant) :
S'ils sont colinéaires, les droites sont parallèles ou confondues (pour le savoir on regarde si un point particulier de l'une est sur l'autre). Autrement elles sont sécantes en un point.

1. Les équations des droites d et d' sont sous forme réduite.
On a $m = -3$ et $m' = 3$, donc $m \neq m'$.
On en déduit que les droites d et d' sont sécantes.

Le point d'intersection

On trouve les coordonnées du point d'intersection en résolvant le système $\begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = 3x \end{cases}$.

$-3x + 5 = 3x$ a pour solution $x = \dfrac{5}{6}$ et en injectant cette valeur dans la deuxième équation (plus simple), on obtient : $y = \dfrac{5}{2}$.
Ainsi les coordonnées du point d'intersection sont $\left(\dfrac{5}{6}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$.

2. Les équations sont données sous forme cartésienne. On étudie la colinéarité des vecteurs directeurs $\vec{u}$ pour d et $\vec{v}$ pour d'.

$d\ :\ \underbrace{2}_{a=2}x\ \underbrace{+3}_{-b=-3}\ y + 1 = 0.$

Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$d'\ :\ \underbrace{-3}_{a=-3}x\ \underbrace{+2}_{-b=-2}\ y - 7 = 0.$

Le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Vecteurs directeurs

Dans une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, un vecteur directeur de cette droite est donné par $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par $\det(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = -3 \times (-3) - 2 \times (-2) = 13$.
Le déterminant des deux vecteurs n'est pas nul, on en déduit que les vecteurs directeurs des deux droites ne sont pas colinéaires et donc que les droites sont sécantes.

3. On calcule la pente m de la droite (AB) :
$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-(-10)}{7-5} = 4$.

La pente de la droite d' est aussi 4. On en déduit que les droites sont parallèles.

Parallèles ou confondues

Quand les pentes sont égales ou que les vecteurs directeurs sont colinéaires, les droites sont soit strictement parallèles, soit confondues.

On regarde si le point A (par exemple) est sur d'.
$4 \times 5 + 5 = 25 \neq y_A$ donc $A \notin d'$.
On en déduit que les droites d et d' sont strictement parallèles.

4. Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d' est $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

On voit que $\vec{u} = 3\vec{v}$ et ainsi les vecteurs directeurs sont colinéaires.
Les droites sont donc soit strictement parallèles, soit confondues.

Le point A d'abscisse 0 de d a pour ordonnée -3 (car $3 \times 0 - 6y = 18$ soit $y = -3$).
A a donc comme coordonnées $(0\ ;\ -3)$.
On regarde si ce point est sur d' :

$0 - 2 \times (-3) = 6$. Donc A est aussi sur d'.
Deux droites parallèles ayant un point commun sont confondues, ainsi d et d' sont confondues.

Résolution du système pour voir ...

$\begin{cases} 3\,x - 6\,y &= 18 \\ x - 2\,y &= 6 \end{cases}$ devient $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\,x - 3 \\ y = \dfrac{1}{2}\,x - 3 \end{cases}$
Il s'agit de la même équation de droite. Les solutions sont les couples de coordonnées de tous les points de la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 3$.

Exercice 2

1.

- $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$.

On exprime y en fonction de x dans la première équation : $y = -2x + 4$ et on remplace (substitue) y par $-2x + 4$ dans la deuxième équation : $x + 2(-2x + 4) = -1$. On obtient comme nouveau système :
$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ x + 2(-2x + 4) = -1 \end{cases}$

La deuxième équation devient une équation à une inconnue : x.

$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ -3x + 8 = -1 \end{cases}$

Dans cette deuxième équation, on isole les x dans le membre de gauche et les non x dans le membre de droite. On obtient :

$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ -3x = -9 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = -2x + 4 \\ x = 3 \end{cases}$

On remplace x par 3 dans l'égalité $y = -2x + 4$ afin d'en déduire la valeur de y. On obtient :

$$\begin{cases} y = -2 \times 3 + 4 \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Le système a une unique solution : le couple $(3\ ;\ -2)$.

Vérification

On peut vérifier que la solution obtenue, c'est-à-dire le couple $(3\ ;\ -2)$, est bien la solution du système :
$2 \times 3 - 2 = 6 - 2 = 4$ et $3 + 2 \times (-2) = 3 - 4 = -1$.

- $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 5x + 4y = -12 \end{cases}$

La première équation permet d'écrire x en fonction de y. On a $x = -2y$. Et on remplace x par $-2y$ dans la deuxième équation, on obtient comme nouveau système :

$$\begin{cases} x = -2y \\ 5 \times (-2y) + 4y = -12 \end{cases}$$

La deuxième équation devient une équation à une inconnue : y.

$$\begin{cases} x = -2y \\ -6y = -12 \end{cases}$$

On obtient en divisant par (-6) les deux membres de la deuxième équation :

$$\begin{cases} x = -2y \\ y = 2 \end{cases}$$

On remplace y par 2 dans l'égalité $x = -2y$ afin d'en déduire la valeur de x. On obtient :

$$\begin{cases} x = -2 \times 2 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Le système a une unique solution : le couple $(-4\ ;\ 2)$.

2. $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$.

Combinaison : méthode

Le principe de la méthode est d'éliminer une inconnue (x ou y) en utilisant une combinaison linéaire pour se ramener à une équation du premier degré.

— On identifie l'inconnue que l'on va éliminer le plus simplement.
— On multiplie une (ou les deux) équation(s) afin d'obtenir des coefficients opposés pour l'inconnue que l'on aura choisi.
— On additionne membre à membre pour éliminer l'inconnue choisie.
— On résout l'équation obtenue qui ne contient plus qu'une inconnue.
— On remplace l'inconnue par la valeur trouvée pour déterminer la valeur de l'autre inconnue.
— On vérifie que les deux valeurs trouvées vérifient bien simultanément les deux équations.
— On écrit la solution du système sous la forme d'un couple solution.

- $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x - y = -6 & \boxed{\times 3} \end{cases}$.

On remarque qu'en multipliant par 3 la deuxième ligne, on obtient des coefficients opposés pour y (3 et -3).

$$\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 6x - 3y = -18 \end{cases}.$$

On garde la première équation et on remplace la deuxième équation en additionnant membre à membre pour éliminer y.

$$\begin{cases} x+3y=11 \\ (x+3y)+(6x-3y)=11-18 \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} x+3y=11 \\ 7x=-7 \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} x+3y=11 \\ x=-1 \end{cases} \quad .$$

On remplace x par -1 dans la première équation :

$$\begin{cases} -1+3y=11 \\ x=-1 \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} 3y=12 \\ x=-1 \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} y=4 \\ x=-1 \end{cases}$$

La solution du système est le couple $(-1\ ;\ 4)$.

- $\begin{cases} 4x+2y=2 \\ -2x+3y=-29 \quad \boxed{\times 2} \end{cases}$

On remarque qu'en multipliant par 2 la deuxième ligne, on obtient des coefficients opposés pour x (2 et -2).

$$\begin{cases} 4x+2y=2 \\ -4x+6y=-58 \end{cases} \quad .$$

On garde la première équation et on remplace la deuxième équation en additionnant membre à membre pour éliminer y.

$$\begin{cases} 4x+2y=2 \\ (-4x+6y)+(4x+2y)=-58+2 \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} 4x+2y=2 \\ 8y=-56 \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} 4x+2y=2 \\ y=-7 \end{cases} \quad .$$

On remplace y par -7 dans la première équation :

$$\begin{cases} 4x+2\times(-7)=2 \\ y=-7 \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} 4x=16 \\ x=-1 \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} x=4 \\ y=-7 \end{cases}$$

La solution du système est le couple $(4\ ;\ -7)$.