MATHEMATIQUES
Quelques exercices pour aller plus loin : corrigé

Exercice 1

1. Développement de $(x+1)^2 - x^2$.

$$\begin{array}{rcll}(x+1)^2 - x^2 & = & x^2+2x+1-x^2 & \text{évidemment, l'égalité remarquable } (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\ & = & 2x+1 & \end{array}$$

2. • Pour 2017, on utilise le résultat précédent avec $x = 1008$.

$$\begin{array}{rcl}2\times 1008+1 & = & (1008+1)^2 - 1008^2 \\ 2017 & = & \underbrace{1009^2 - 1008^2}_{\text{Différence de deux carrés}}\end{array}$$

Explications

La question commence par : "en déduire". Il s'agit donc d'utiliser le résultat précédent pour répondre à cette question. Si l'on regarde bien l'égalité démontrée, on voit dans le premier membre une différence de deux carrés et c'est exactement ce que l'on nous demande. Il s'agit donc d'"identifier" 2017 au résultat obtenu soit $2x+1$ et $2x+1 = 2017$ donne $x = 1008$.

• Pour 763, on utilise le résultat précédent avec $x = 381$ (car $2x+1 = 763$ a pour solution $x = 381$).

$$\begin{array}{rcl}2\times 381+1 & = & (381+1)^2 - 381^2 \\ 763 & = & \underbrace{382^2 - 381^2}_{\text{Différence de deux carrés}}\end{array}$$

3. Calcul de la somme S :

On procède de la même manière qu'à la question précédente pour chacun des termes de la somme :

$$\begin{array}{rcl}1 & = & 1^2 - 0^2 \\ 3 & = & 2^2 - 1^2 \\ 5 & = & 3^2 - 2^2 \\ 7 & = & 4^2 - 3^2 \\ ..... & = & ..... \\ 2015 & = & 1008^2 - 1007^2 \\ 2017 & = & 1009^2 - 1008^2\end{array}$$

En additionnant membre par membre, on s'aperçoit que, dans celui de droite, les termes se compensent deux à deux, sauf deux d'entre eux, et on obtient :

$$\begin{array}{rcl}1+3+5+7+.....+2015+2017 & = & (\cancel{1^2} - 0^2) + (\cancel{2^2} - \cancel{1^2}) + (\cancel{3^2} - \cancel{2^2}) + (\cancel{4^2} - \cancel{3^2}) + ... + (\cancel{1008^2} - \cancel{1007^2}) + (1009^2 - \cancel{1008^2}) \\ 1+3+5+7+.....+2015+2017 & = & 1009^2 - 0^2\end{array}$$

On obtient donc $S = 1018081$.

Exercice 2

En posant $x = 9876543215$, on peut écrire :

$$9876543215^2 - 9876543213 \times 9876543217 = x^2 - (x-2)(x+2)$$

Explications

Les nombres mis en jeu sont proches les uns des autres. Vous devez avoir l'idée de poser $x =$ un des nombres puis exprimer en fonction de x le résultat.

$$\begin{aligned} x^2 - (x-2)(x+2) &= x^2 - (x^2 - 4) \\ &= \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$9876543215^2 - 9876543213 \times 9876543217 = 4$.

Exercice 3

Les programmes sont identiques s'ils donnent les mêmes résultats pour n'importe quelles valeurs de x entrées.

On choisit x comme nombre de départ dans le **programme 1** :
- On ajoute 3 : $x + 3$.
- On élève au carré le nombre obtenu : $(x+3)^2$.
- On soustrait 25 : $(x+3)^2 - 25$.

On choisit x comme nombre de départ dans le **programme 2** :
- $y = x - 2$.
- $z = x + 8$.
- $r = y \times z = (x-2)(x+8)$.

$$\begin{aligned} (x+3)^2 - 25 &= x^2 + 6x + 9 - 25 \\ &= x^2 + 6x - 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-2)(x+8) &= x^2 + 8x - 2x - 16 \\ &= x^2 + 6x - 16 \end{aligned}$$

Explications

On compare ce qui est comparable. Vous devez donc développer les deux expressions afin de les comparer.
$(x+3)^2 - 25$ est une forme canonique d'un polynôme du second degré, et $(x-2)(x+8)$ est la forme factorisée.

Les formes développées sont égales. On en déduit que les deux programmes sont "identiques".

Exercice 4

Soit n le plus petit des trois entiers recherchés. Les deux entiers consécutifs à n sont $(n+1)$ et $(n+2)$.
La contrainte de l'énoncé s'écrit donc sous la forme de l'égalité $(n+2)^2 - n(n+1) = 2017$.

$$\begin{array}{rcl} (n+2)^2 - n(n+1) & = & 2017 \\ \cancel{n^2} + 4n + 4 - \cancel{n^2} - n & = & 2017 \\ 3n+4 & = & 2017 \\ 3n & = & 2013 \\ n & = & \dfrac{2013}{3} \\ n & = & 671 \end{array}$$

Explications

A première vue, on ne sait pas résoudre cette équation. Il n'y a qu'une seule chose à faire, c'est de développer en espérant qu'on ait des simplifications ..... et c'est bien le cas.... ouf !

Conclusion : Il existe un seul triplet d'entiers consécutifs tels que la différence entre le carré du plus grand et le produit des deux autres soit égale à 2017 ; ces trois entiers sont 671, 672 et 673.

Exercice 5

1. Le nombre p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. Il est donc impair. Par conséquent, $p+1$ et $p-1$ sont pairs et donc divisibles par 2. On en déduit que a et b sont des entiers.

2. a. Calcul de $a^2 - b^2$.

$$\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & \left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2 \\ & = & \dfrac{(p+1)^2}{4} - \dfrac{(p-1)^2}{4} \\ & = & \dfrac{p^2+2p+1}{4} - \dfrac{p^2-2p+1}{4} \\ & = & \dfrac{p^2+2p+1-(p^2-2p+1)}{4} \\ & = & \dfrac{\cancel{p^2}+2p+\cancel{1}-\cancel{p^2}+2p-\cancel{1}}{4} \\ & = & \dfrac{4p}{4} \\ & = & p \end{array}$$

Attention au signe - devant la parenthèse...

b. D'après la question précédente, tout nombre p premier supérieur ou égal à 3 s'écrit sous la forme $a^2 - b^2$ avec a et b entiers. Ainsi, on vient de démontrer que tout nombre premier supérieur ou égal à 3 s'écrit sous la forme d'une différence de deux carrés d'entiers.

3. • Avec 23 :

$a = \dfrac{23+1}{2} = 12$ et $b = \dfrac{23-1}{2} = 11$.
Ainsi,

$$23 = 12^2 - 11^2$$

• Avec 37 :

$a = \dfrac{37+1}{2} = 19$ et $b = \dfrac{37-1}{2} = 18$.
Ainsi,

$$37 = 19^2 - 18^2$$