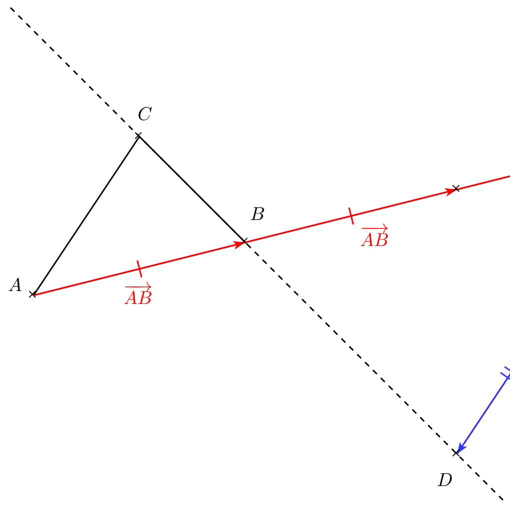
MATHEMATIQUES
Quelques exercices sur les vecteurs (corrigé)

Exercice 1

- Partie A -

1.



2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\\ &= -\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\\ &= 2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

En fonction de ...

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ signifie que l'on veut des égalités du type :
$\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}=x'\overrightarrow{AB}+y'\overrightarrow{AC}$

3. On remarque que $\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{BC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.
Donc les points B, C et D sont alignés.

Ben oui...

On a $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=-2(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=-2(\underbrace{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}}_{=\overrightarrow{BC}})$

- Partie B -

La figure est la précédente.

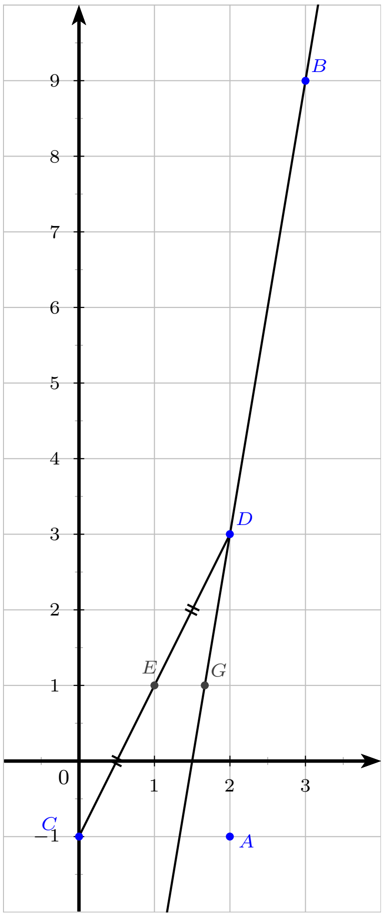
1. Coordonnées des points dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})$:
$A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 1)$ et $D(3\ ;\ -2)$.

2. On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$.
$(-1)\times(-2)-1\times 2=2-2=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires, donc les points B, C et D sont alignés.

N'oubliez pas !

Le point M a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})$ lorsque x et y vérifient $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$. On obtient ainsi directement les coordonnées du point D dans $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})$.

Exercice 2



1. $E\left(\dfrac{0+2}{2}\ ;\ \dfrac{-1+3}{2}\right)$, soit $E(1\ ;\ 1)$.

2. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$

$$\iff \begin{cases}(2-x_G)+(1-x_G)+(2-x_G)=0\\(-1-y_G)+(1-y_G)+(3-y_G)=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}5-3x_G=0\\3-3y_G=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x_G=\dfrac{5}{3}\\y_G=1\end{cases}.$$

3. $\overrightarrow{BD}(-1\ ;\ -6)$ et $\overrightarrow{BG}\left(-\dfrac{4}{3}\ ;\ -8\right)$

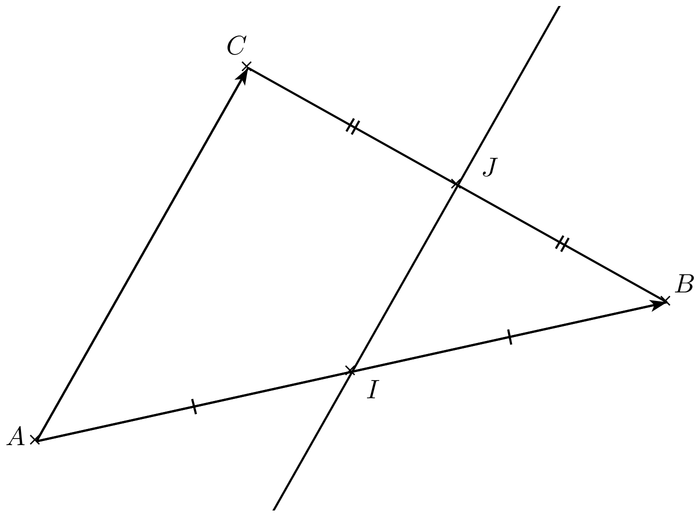
Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires car $(-1)\times(-8)-(-6)\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)=0$.

Par conséquent les points B, D et G sont alignés.

Le déterminant

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et si $\det(\vec{u}\ ,\ \vec{v})=xy'-yx'=0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
En d'autres termes, si les coordonnées des vecteurs sont proportionnelles alors les vecteurs sont colinéaires.

Exercice 3



Conseils

Faites un schéma pour vous repérer. C'est important de bien visualiser la situation.

Dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right)$, on a :

$A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 1)$, $I\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ et $J\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ car J a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_B+x_C}{2}\ ;\ \dfrac{y_B+y_C}{2}\right)$.

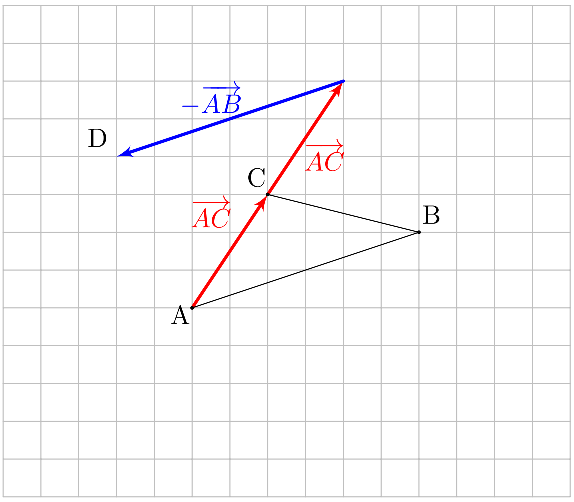
Dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right)$, le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

On remarque aisément que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{IJ}$.

Les droites (IJ) et AC sont donc parallèles.

Exercice 4

1. $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.



2. a. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\\ &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\\ &= -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

3. On déduit des deux égalités vectorielles précédentes que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\\ &= 2\left(\underbrace{-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}_{=\overrightarrow{BC}}\right)\\ &= 2\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc colinéaires car il existe un réel k (ici $k = 2$) tel que $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC}$.
Les points B, C et D sont alignés.

Et même mieux

On en déduit même que le point C est le milieu du segment $[BD]$ car $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

Exercice 5

1.

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{3}{2}(\underbrace{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}}_{=\overrightarrow{BC}}) \\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

Explications

L'idée est de simplifier l'écriture du vecteur $\vec{u}$ pour réussir à l'écrire en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Je sais c'est pas évident mais il faut y arriver.

Par conséquent, $\vec{u}$ est bien colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

2.

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB} \\
&= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \\
&= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} \\
&= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

Explications

L'idée est de simplifier les écritures des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ afin de les écrire en fonction des mêmes vecteurs (ici, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB} \\
&= 2\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \\
&= 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= 3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} \\
&= -3(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \\
&= -3\vec{u}
\end{aligned}$$

Par conséquent $\vec{v} = -3\vec{u}$ et donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien colinéaires.