MATHEMATIQUES

Généralités sur les fonctions. Fonctions de référence : entraînement savoir-faire 1 (corrigé)

Exercice 1

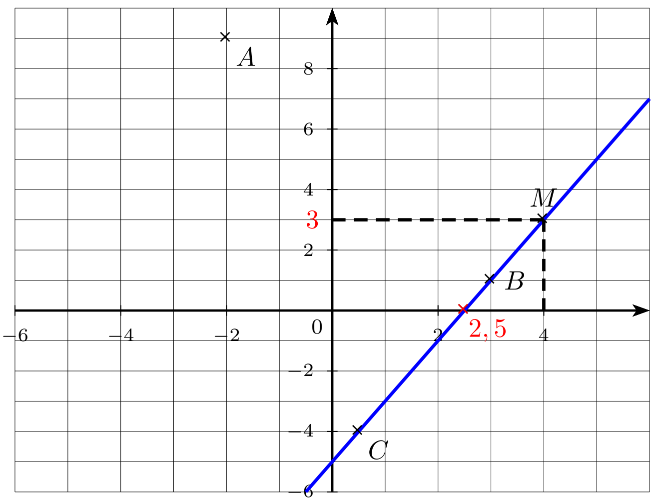
1. a. • $f(-2) = 2 \times (-2) - 5 = -4 - 5 = -9$.
L'image de l'abscisse du point A par f n'est pas égale à son ordonnée, donc $A \notin \mathscr{D}$.

b. • $f(3) = 2 \times 3 - 5 = 6 - 5 = 1$.
L'image de l'abscisse du point B par f est égale à son ordonnée, donc $B \in \mathscr{D}$.

Point sur une courbe

A quelles conditions un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est-il sur la courbe $\mathscr{C}_f$? Deux choses : x doit être dans l'ensemble de définition de f et y doit être l'image de x par f. On doit donc avoir l'égalité $y = f(x)$.

• $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \times \dfrac{1}{2} - 5 = 1 - 5 = -4$.
L'image de l'abscisse du point C par f est égale à son ordonnée, donc $C \in \mathscr{D}$.



A reconnaître

La fonction f est une fonction affine. Sa représentation graphique est une droite. Son ordonnée à l'origine est -5 (elle coupe donc l'axe des ordonnées en $(0\ ;\ -5)$) et son coefficient directeur est 2. A partir d'un point de la droite quand on se décale d'une unité vers la droite, on monte de deux unités pour retrouver un point de la droite.... avec le graphique, c'est plus clair :-)

c. On cherche x tel que $f(x) = 3$.

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 3 \\ 2x - 5 {\color{blue}+5} &= 3 {\color{blue}+5} \\ 2x &= 8 \\ \frac{2x}{\color{blue}2} &= \frac{8}{\color{blue}2} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Explications

Le point M a pour coordonnées $(x\ ;\ 3)$. On sait que ses coordonnées vérifient l'équation $y = 2x - 5$ soit (comme $y = 3$), $2x - 5 = 3$.

Le point M a pour abscisse 4.

d. On cherche x tel que $f(x) = 0$.

$$\begin{array}{rcl} 2x-5 &=& 0 \\ 2x-5 {\color{blue}+5} &=& 0 {\color{blue}+5} \\ 2x &=& 5 \\ \dfrac{2x}{\color{blue}2} &=& \dfrac{5}{\color{blue}2} \\ x &=& 2,5 \end{array}$$

Explications

Le point qui se trouve sur la droite et sur l'axe des abscisses a pour ordonnée 0. Ses coordonnées sont donc de la forme $(x\ ;\ 0)$. On sait que ses coordonnées vérifient l'équation $y = 2x - 5$ donc on cherche donc x tel que $0 = 2x - 5$.

Les coordonnées du point d'intersection entre l'axe des abscisses et $\mathscr{D}$ sont $(2,5\ ;\ 0)$.

2. La courbe $\mathscr{C}_g$ a pour équation $y = g(x)$ soit $y = \dfrac{x^2+12}{4}$. On cherche x tel que $y = 0$ soit $\dfrac{x^2+12}{4} = 0$.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x^2+12}{4} &=& 0 \\ {\color{blue}4\times}\dfrac{x^2+12}{4} &=& 0{\color{blue}\times 4} \\ x^2+12 &=& 0 \\ x^2+12 {\color{blue}-12} &=& 0 {\color{blue}-12} \\ x^2 &=& -12 \end{array}$$

Equation $x^2 = a$

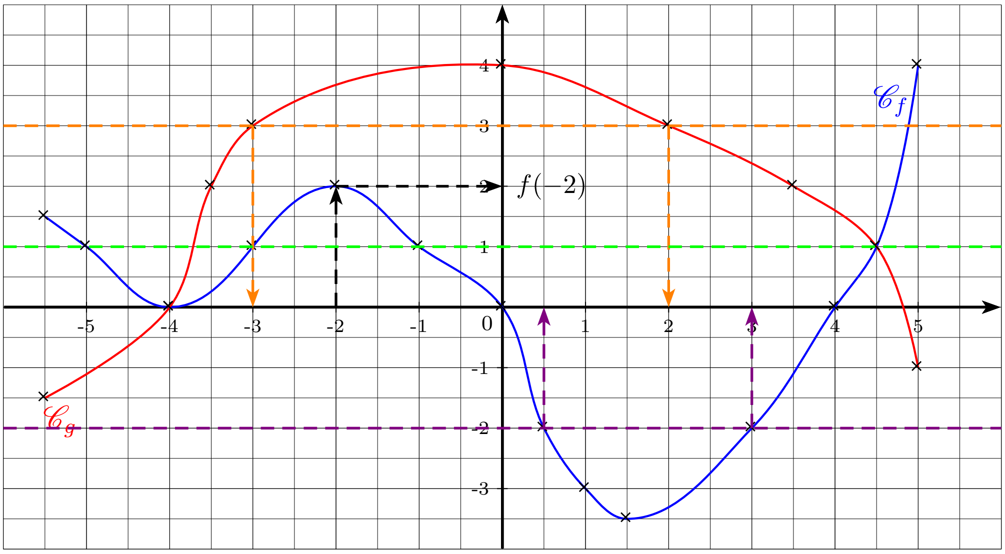
Cette équation a 0, 1 ou 2 solutions suivant le signe de a.
- Si $a < 0$ pas de solution ;
- Si $a = 0$ une solution : 0 ;
- Si $a > 0$, deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Cette équation n'a pas de solution, donc il n'existe pas de points de $\mathscr{C}_g$ d'ordonnée nulle.

3.
- $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées $(-5\ ;\ 2)$ se traduit par $h(-5) = 2$.
- $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -1 se traduit par $h(0) = -1$.
- $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -2 et 10 se traduit par $h(-2) = h(10) = 0$.

Exercice 2

On donne les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ d'une fonction f et d'une fonction g.



1. Donner l'ensemble de définition des fonctions f et g.

$\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_g = [-5,5\ ;\ 5]$.

Remarque
Les deux fonctions f et g ont le même ensemble de définition : l'intervalle $[-5,5\ ;\ 5]$.

2. Déterminer graphiquement $f(-2)$ et $f(4)$.

$f(-2) = 2$ et $f(4) = 0$.

Pensez-y !
Les images se lisent sur l'axe des ordonnées.

3. Déterminer graphiquement les antécédents de 3 par g.

Antécédents de 3 par g : -3 et 2 (traces graphiques orange).

Pensez-y !
Les antécédents se lisent sur l'axe des abscisses.

4. Résoudre graphiquement les équations suivantes (On notera $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ et $\mathscr{S}_3$ les ensembles solutions) :

$f(x) = 0$ $\quad$ $f(x) = -2$ $\quad$ $f(x) = g(x)$

$\mathscr{S}_1 = \{-4\ ;\ 0\ ;\ 4\}$ (abscisses des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses)

$\mathscr{S}_2 = \{0,5\ ;\ 3\}$ (traces graphiques violettes)

$\mathscr{S}_3 = \{-4\ ;\ 4,5\}$ (abscisses des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$)

5. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes (On notera $\mathscr{S}_4$, $\mathscr{S}_5$ et $\mathscr{S}_6$ les ensembles solutions) :

$f(x) < 0$ $\quad$ $f(x) > 1$ $\quad$ $f(x) > g(x)$

$\mathscr{S}_4 =]0\ ;\ 4[$ (abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de l'axe des abscisses)

$\mathscr{S}_5 = [-5,5\ ;\ -5[\cup]-3\ ;\ -1[\cup]4,5\ ;\ 5]$ (abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au dessus de la droite verte)

$\mathscr{S}_6 = [-5,5\ ;\ -4[\cup]4,5\ ;\ 5]$ (abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés strictement au dessus de $\mathscr{C}_g$)

Exercice 3

Explications

Quand les images par f sont négatives, on dit que la fonction est négative et quand les images par f sont positives, on dit que la fonction est positive. Graphiquement, cela se voit par la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses. Quand la courbe se situe au-dessus de l'axe des abscisses, les images sont positives et la fonction est positive et quand la courbe se situe en dessous de l'axe des abscisses, les images sont négatives et la donc la fonction est négative.

1. Tableau de signes de la fonction f :

x	-4		-3		1		4
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

0 doit apparaître

En 1, la fonction s'annule mais reste positive. Les valeurs qui annulent la fonction doivent apparaître dans le tableau de signes.

2. Tableau de signes de la fonction g :

x	-50		-40		-10		40
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Tableau de signes de la fonction h :

x	0		1		7		8
Signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

4. Tableau de signes de la fonction u :

x	$-0{,}8$		$-0{,}3$		$0{,}9$
Signe de $u(x)$		$+$	0	$-$	