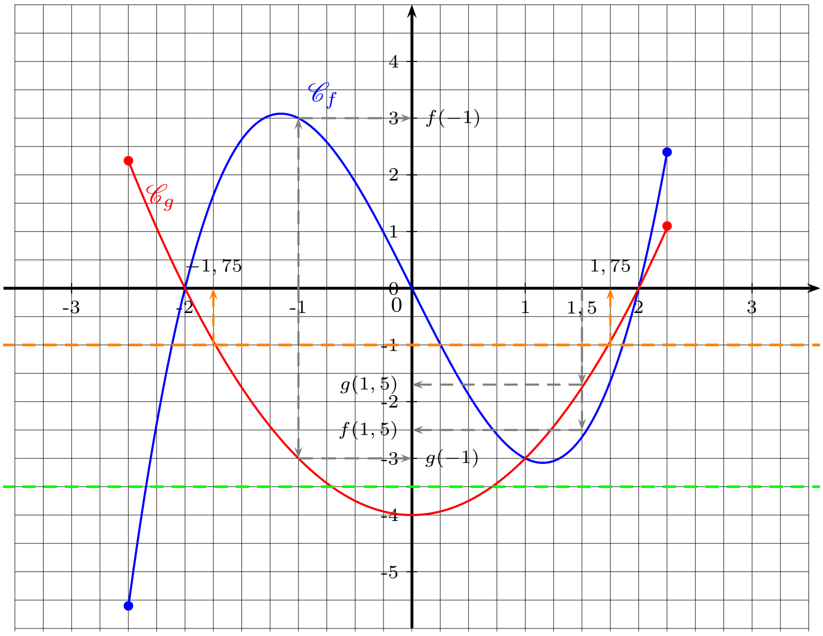
MATHEMATIQUES
Généralités sur les fonctions. Fonctions de référence : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1



-Partie A-

1. $I = [-2,5\ ;\ 2,25]$.

2. **a.** $f(-1) = 3$ et $g(-1) = -3$.

b. Les antécédents de -3 par g sont -1 et 1.

c. $f(1,5) < g(1,5)$. Nabolos a donc tort.

Pensez-y!
Les images se lisent sur l'axe des ordonnées et les antécédents sur l'axe des abscisses.

-Partie B-

1. $f(x) = 0$ $\quad\quad$ $\mathscr{S} = \{-2\ ;\ 0\ ;\ 2\}$.

Explication
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. $g(x) < 0$ $\quad\quad$ $\mathscr{S} =]-2\ ;\ 2[$.

Explication
Les solutions de l'inéquation $g(x) < 0$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_g$ qui se situent en dessous de l'axe des abscisses.

3. $g(x) = -1$ $\quad\quad$ $\mathscr{S} = \{-1,75\ ;\ 1,75\}$.

Explication
Les solutions de l'inéquation $g(x) = -1$ sont les abscisses des points d'intersection de de la courbe $\mathscr{C}_g$ avec la droite d'équation $y = -1$ (droite orange).

4. $g(x) > -3,5$ $\mathscr{S} = [-2,5\ ;\ -0,75[\cup]0,75\ ;\ 2,25]$.

Explication

Les solutions de l'inéquation $g(x) > -3,5$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_g$ qui se situent strictement au dessus de la droite d'équation $y = -3,5$ (droite verte).

5. $f(x) = g(x)$ $\mathscr{S} = \{-2\ ;\ 1\ ;\ 2\}$.

Explication

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

6. $f(x) > g(x)$ $\mathscr{S} =]-2\ ;\ 1[\cup]2\ ;\ 2,25]$.

Explication

Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui se situent au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

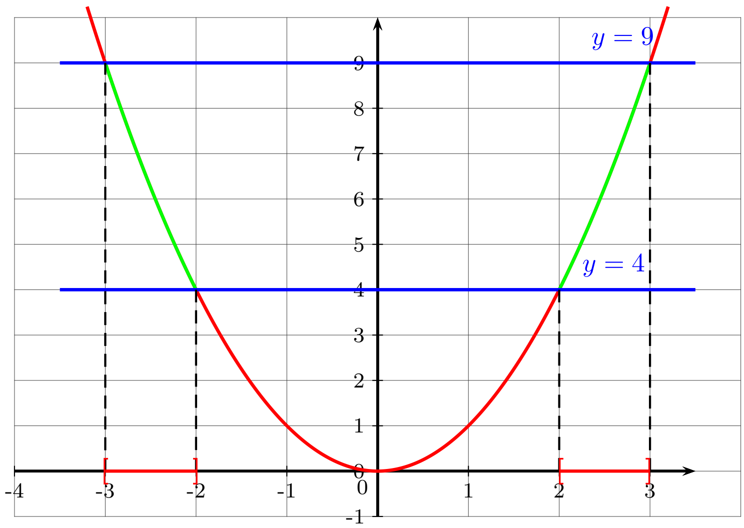
Exercice 2

1. La somme des inverses des carrés de 2 et de 3 se calculent par :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{9}{36} + \frac{4}{36} \\ &= \frac{13}{36}\end{aligned}$$

2. On peut utiliser la courbe de la fonction carré.... histoire de ne pas écrire de bêtises !



Explications

On trace les droites d'équations $y = 4$ et $y = 9$. On repère les points de la parabole qui se situent entre ces deux droites (en vert). Les solutions sont les abscisses de ces points.

Ainsi, les réels a cherchés sont tels que $a \in [-3\ ;\ -2] \cup [2\ ;\ 3]$.

3. En utilisant le graphique précédent.

Si $b \in [-4 ; 3]$, alors $b^2 \in [0 ; 19]$.

L'erreur classique

On prend le carré de (-4) et le carré de 3 et on écrit donc que $b^2 \in [9 ; 16]$. C'est FAUX !. Par exemple, si $b = 2$, $b^2 = 4$ et $4 \notin [9 ; 16]$. Donc vous voyez bien que c'est faux. En fait il faut regarder comment évolue le carré de b quand b est dans l'intervalle $[-4 ; 3]$. La plus petite valeur de de b^2 est 0 et la plus grande 16. Et ça, on peut vraiment bien le voir sur le graphique.

4. L'inéquation $c^2 < 17$ a pour ensemble de solutions $]-\sqrt{17} ; \sqrt{17}[$.

Pour vous aider

N'hésitez pas à refaire la parabole et regarder graphiquement les solutions de cette inéquation.

L'inéquation $\dfrac{1}{x} < 0$ a pour ensemble de solutions $]-\infty ; 0[$.

On réfléchit

Les réels x qui ont un inverse négatif sont les réels négatifs..... c'est 1 diviser par un réel négatif qui donne un réel négatif.

On cherche donc les entiers négatifs qui appartiennent à l'intervalle $]-\sqrt{17} ; \sqrt{17}[$. Il y a 0, -1, -2, -3 et -4.

5. L'inverse de la somme des carrés de 2 et de 3 se calcule par :

$$\frac{1}{2^2+3^2} = \frac{1}{13}$$

6. Si le carré de d est 7, alors d vaut soit $\sqrt{7}$ soit $-\sqrt{7}$.
Son inverse est négatif, donc $d = -\sqrt{7}$.

Ainsi, $d^3 = \left(\sqrt{7}\right)^3 = (\sqrt{7})^2 \times \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$.

7. $m + p$ n'admet pas d'inverse signifie que m et p sont opposés. En effet il n'y a que 0 qui n'a pas d'inverse.
Ainsi, $m = -p$.

L'égalité $m^2 + p^2 = 50$ peut s'écrire $m^2 + (-m)^2 = 50$ soit $2m^2 = 50$.

Cette dernière équation est équivalente à $m^2 = 25$ qui a deux solutions -5 et 5.

Equation de référence

L'équation $x^2 = k$ est une équation de référence. Il faut savoir la résoudre les yeux fermés !

Ainsi, $m = 5$ et $p = -5$ ou $m = -5$ et $p = 5$.

8. Le produit $s \times t$ n'admet pas d'inverse. Ainsi, soit $s = 0$, soit $t = 0$.
La somme de leur carré est 4.

- Si $s = 0$, alors $t = -2$ ou $t = 2$.
- Si $t = 0$, alors $s = -2$ ou $s = 2$.

Les couples solutions sont donc : $(0 ; 2)$, $(0 ; -2)$, $(-2 ; 0)$ et $(2 ; 0)$

Exercice 3

1. Chaque stylo est vendu 2,50 €, on en déduit que pour x stylos vendus, la recette est $2,5 \times x$.
On a donc :
$$R(x) = 2,5x$$

2. Les coûts fixes s'obtiennent pour $x = 0$ (c'est-à-dire pour aucun stylo fabriqué).
$C(0) = 1,25 \times 0 + 180 = 180$.
Les coûts fixes s'élèvent à 180 €.

3. D'après l'énoncé, $B(x) = R(x) - C(x)$.

$$\begin{aligned} B(x) &= 2,5x - (1,25x + 180) \\ &= 2,5x - 1,25x - 180 \quad \text{Attention au signe } - \text{ devant la parenthèse.} \\ &= 1,25x - 180 \end{aligned}$$

4.
- $R(200) = 2,5 \times 200 = 500$
- $C(200) = 1,25 \times 200 + 180 = 430$
- $B(200) = 1,25 \times 200 - 180 = -70$.

Quand l'entreprise fabrique et vend 200 stylos, elle perd 70 €.

5. On résout l'inéquation :.

$$\begin{aligned} 1,25x - 180 &> 0 \\ 1,25x &> 180 \\ x &> 144 \end{aligned}$$

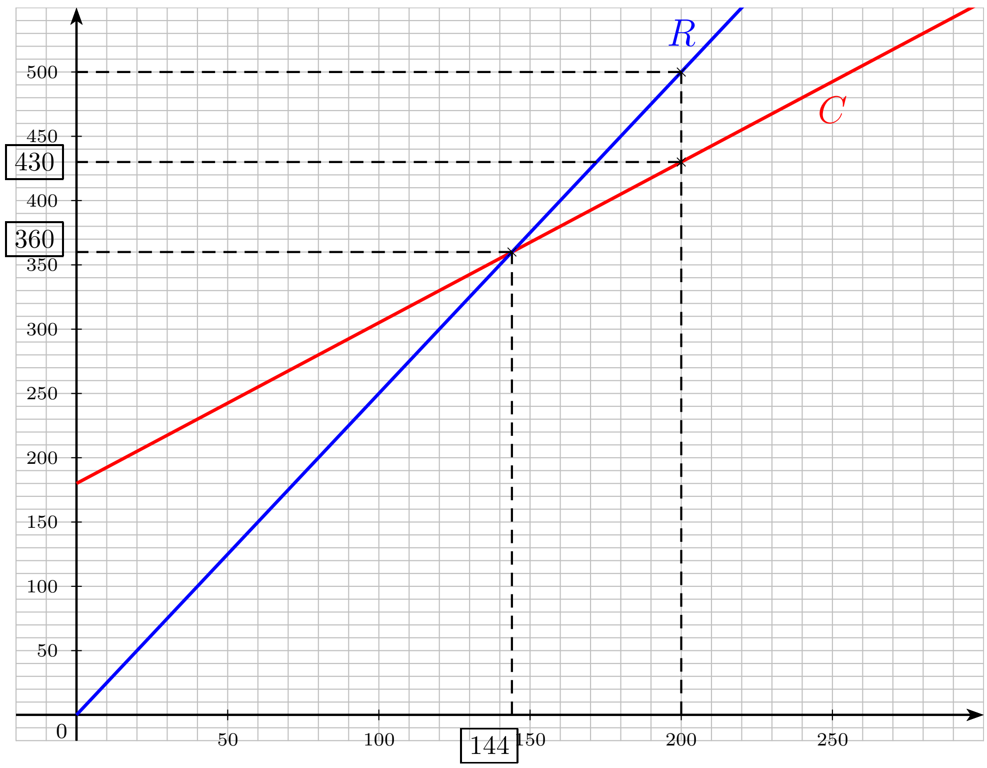
C'est à partir de 145 stylos produits et vendus que l'entreprise aura un bénéfice positif.

6. Représentations graphiques.
Les fonctions C et R sont des fonctions affines. Elles sont donc représentées par des droites.

x	0	200
$C(x)$	180	430

x	0	200
$R(x)$	0	500

Conseil
Un petit tableau de valeurs est plus approprié ici pour représenter les fonctions.



7. Les deux droites se coupent en $(144\ ;\ 360)$ et c'est à partir de $x = 144$ que la recette est supérieure aux coûts. On retrouve bien le résultat de la question **5.** : pour réaliser un bénéfice positif, l'entreprise doit produire et vendre plus de 144 stylos par jour.

Exercice 4

L'aire du triangle OMN est donnée par $\dfrac{ON \times NM}{2}$.

Or, $ON = x$ et $MN = \dfrac{1}{x}$.

Ainsi, $\text{Aire}(OMN) = \dfrac{x \times \dfrac{1}{x}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Donc l'aire est bien constante et vaut $\dfrac{1}{2}$.

Explications

Le triangle OMN est rectangle. Son aire est donnée par $\dfrac{ON \times NM}{2}$. N'oubliez pas que le point M a pour coordonnées $\left(x\ ;\ \dfrac{1}{x}\right)$ car M est sur l'hyperbole. Par conséquent, $MN = \dfrac{1}{x}$.
Montrer que l'aire est constante revient à montrer que l'aire ne dépend pas de x, que c'est toujours la même valeur quelque soit la position du point M sur l'hyperbole.