MATHEMATIQUES
Intervalles et inégalités : entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

1. On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} 5x-10 &> 0 \\ 5x &> 0+10 \\ 5x &> 10 \\ x &> \frac{10}{5} \\ x &> 2 \end{aligned}$$

Réponse : ☒ Tous les nombres strictement supérieurs à 2.

2. • Si $a<b$, alors $\frac{a}{2}<\frac{b}{2}$ (on divise par 2). La réponse **a.** est fausse.
• Si $a<b$, $5a<5b$ (en multipliant par 5) et donc $5a-1<5b-1$ (en retranchant 1). La réponse **b.** est correcte.

• Si $a<b$, alors $-2a>-2b$ (en multipliant par (-2)) et donc $-2a+3>-2b+3$ (en ajoutant 3). La réponse **c.** est correcte.

N'oubliez pas !
On ne le répétera jamais assez : quand on multiplie par un nombre négatif, on CHANGE le sens de l'inégalité.

Réponses : ☒ $5a-1<5b-1$ et ☒ $-2a+3>-2b+3$.

3. • Si $-4a \geqslant -4b$, alors $a \leqslant b$ (on divise par $(-4)<0$). La réponse **a.** est fausse.
• Si $-4a \geqslant -4b$, alors $-a \geqslant -b$ (on divise par $4>0$). La réponse **b.** est correcte.
• Si $-4a \geqslant -4b$, alors $-2a \geqslant -2b$ (on divise par $2>0$). La réponse **c.** est correcte.

Réponses : ☒ $-a \geqslant -b$ et ☒ $-2a \geqslant -2b$.

4. L'inéquation $2x>0$, peut s'écrire :
• $x>0$ en divisant les deux membres par 2.
• $-2x<0$ d'où $-2x+1>1$ en multipliant les deux membres par (-2) puis en ajoutant 1.
• $4x>0$ en multipliant les deux membres par 2.

Réponse : ☒ $x>0$ ☒ $-2x+1>1$ ☒ $4x>0$

5. En retranchant 1, on obtient : $-1<2x<0$
Puis en divisant par 2, on obtient : $-\frac{1}{2}<x<0$.

Réponses : ☒ $-\frac{1}{2}<x<0$

Exercice 2

1. • $x=5$.
• Le double de 5 est 10. En retranchant 4, on obtient : $10-4=6$.
• $-2\times 6=-12$.
On obtient -12 qui est inférieur à 5.

2. • Le nombre choisi est x.
• Le double de x est $2x$. En retranchant 4, on obtient : $2x-4$.
• En multipliant le résultat par -2, on obtient : $-2(2x-4)$.

Méthode
Seul le calcul littéral permet de répondre à cette question. Pour cela, on choisit comme nombre de départ x et on écrit le résultat en fonction de x.

On souhaite déterminer les valeurs de x pour que l'inégalité $-2(2x-4) > x$ soit vérifiée.

$$\begin{aligned} -2(2x-4) &> x \\ -4x+8 &> x \\ -4x-x &> -8 \\ -5x &> -8 \\ x &< \frac{-8}{-5} \\ x &< \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Pour obtenir un nombre supérieur au nombre de départ, il faut choisir un nombre inférieur à $\frac{8}{5}$.

On vérifie

5 n'est pas solution de l'inéquation : cela permet de confirmer la réponse à la question 1.

Exercice 3

On sait que $\frac{5}{57} < \frac{25}{23}$.

Méthode

$\frac{5}{57}$ est un nombre plus petit que 1 (le numérateur est plus petit que le dénominateur) et $\frac{25}{23}$ est plus grand que 1 (le numérateur est plus grand que le dénominateur).

Par conséquent, en multipliant par -4, on obtient :
$-4 \times \frac{5}{57} > -4 \times \frac{25}{23}$, puis en ajoutant $\frac{35}{3}$, on a $-4 \times \frac{5}{57} + \frac{35}{3} > -4 \times \frac{25}{23} + \frac{35}{3}$

Exercice 4

On note x le montant de la remise en euros sur un litre de fioul.

Méthode

Choix de l'inconnue. On cherche un nombre positif dont on connaît un ordre de grandeur... On pouvait résoudre ce problème avec un autre choix d'inconnue : par exemple le montant d'un litre de fioul remisé.

- 1 litre de fioul avec remise coûte $(0,75-x)$ €. Le transport est facturé 100 € pour 3000 litres, la facture de cette commande est donc de : $100+3000(0,75-x)$.
- Ce montant doit être inférieur à 2170 € (budget maximum de Nabolos).
- On obtient donc :
$100+3000(0,75-x) \leqslant 2170$.

Méthode

La mise en inéquation du problème se fait pas à pas. Chaque terme de la phrase est traduit en langage mathématique. Le mot « maximum »dans l'énoncé donne le sens de l'inégalité.

$$\begin{aligned} 100+3000(0,75-x) &\leqslant 2170 \\ 100+3000\times 0,75-3000x &\leqslant 2170 \\ 100+2250-3000x &\leqslant 2170 \\ -3000x &\leqslant 2170-2350 \\ x &\geqslant \frac{-180}{3000} \\ x &\geqslant 0,06 \end{aligned}$$

Méthode

On résout l'inéquation. On utilise les règles de résolution relatives aux inéquation.

Pour rentrer dans son budget, Nabolos doit négocier une remise d'au moins 0,06 € (soit 6 centimes d'euro) par litre de fioul.

Méthode

On écrit une phrase de conclusion qui permet de répondre clairement au problème posé. On fait attention à la cohérence du résultat.

Exercice 5

On appelle p le prix d'un pull.
La personne B a acheté le pull en trois exemplaires. Elle a donc payé $3p$ €.
La personne A a acheté un pull et un pantalon de jogging. Elle a donc payé $p + 54$ €.

La personne B a dépensé plus d'argent que la personne A.
Cela se traduit par : $3p > p + 54$.

$$\begin{array}{rcl} 3p & > & p+54 \\ 3p-p & > & 54 \\ 2p & > & 54 \\ p & > & \dfrac{54}{2} \\ p & > & 27 \end{array}$$

Un pull coûte donc au moins 27 €. La personne a tort.

Par l'absurde

On suppose que le prix du pull est 25€. Dans ce cas, la personne A a dépensé $54 + 25 = 79$ €et la personne B a dépensé $3 \times 25 = 75$ € donc moins que la personne A ce qui est contredit par l'énoncé. Donc le pull ne peut pas coûter 25 €.

Exercice 6

1. Démonstration de l'égalité.

$$\begin{array}{rcl} (5-3x)(1+3x) & = & 5+15x-3x-9x^2 \\ & = & -9x^2+12x+5 \\ & = & f(x) \end{array}$$

Donc pour tout x réel, $f(x) = (5-3x)(1+3x)$.

Explications

Pour démontrer l' égalité $f(x) = (5-3x)(1+3x)$, on est parti du membre de droite et on a développé pour retrouver le membre de gauche. Faites attention de ne pas écrire la conclusion au départ : pour être plus clair, ne commencez pas en écrivant :
$f(x) = (5-3x)(1+3x) = ...$

2. **a.** Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses sont donnés par les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
On prend la forme 2 pour résoudre cette équation.

$$\begin{array}{rcl} (5-3x)(1+3x) & = & 0 \quad \text{C'est une équation produit nul.} \\ 5-3x=0 & \text{ou} & 1+3x=0 \\ -3x=-5 & \text{ou} & 3x=-1 \\ x=\dfrac{5}{3} & \text{ou} & x=\dfrac{-1}{3} \end{array}$$

La parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en $\left(\dfrac{5}{3}\ ;\ 0\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{3}\ ;\ 0\right)$.

b. On calcule $f(0)$ avec la forme 1.

$f(0) = -9 \times 0^2 + 12 \times 0 + 5 = 5.$

La parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des ordonnées en $(0\ ;\ 5)$.

c. Pour résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$, on prend la forme 2.

Explications

Pour résoudre cette inéquation, on est amené à dresser le tableau de signes de $f(x)$. Cela tombe bien on a une forme factorisée de $f(x)$.

$5-3x$ s'annule pour $x=\dfrac{5}{3}$ et $1+3x$ s'annule pour $x=-\dfrac{1}{3}$. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		$\dfrac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $5-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $1+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxx}}_{f(x)\geqslant 0}$

$\mathscr{S}=\left[-\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{5}{3}\right]$.

Graphiquement, cela signifie que la parabole se situe au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{5}{3}\right[$.

Conseil

Regardez l'écran de votre calculatrice pour vérifier la cohérence de ce résultat. C'est important de savoir faire le lien entre le calcul et le graphique.