MATHEMATIQUES
Signe d'une fonction et inéquations : entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

1. Calcul de l'image de $\frac{1}{3}$ par f :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} - \frac{9}{27} \\ &= -\frac{8}{27} \end{aligned}$$

L'image de $\frac{1}{3}$ par f est négative donc l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ se trouve en dessous de l'axe des abscisses.

2. $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine du repère si et seulement si $f(0) = 0$.
On a bien $f(0) = 0$. On en déduit que $\mathscr{C}_f$ passe bien par l'origine du repère.

3. On développe :

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-1)(x+1) \\ &= (x^2 - x)(x+1) \\ &= \underbrace{x^3}_{x^2 \times x = x^3} + x^2 - x^2 - x \\ &= x^3 - x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On a bien $f(x) = x(x-1)(x+1)$.

Méthode

Pour démontrer l' égalité, on est parti du membre de droite et on a développé pour retrouver le membre de gauche. Faites attention de ne pas écrire la conclusion au départ ! Pour être plus clair, ne commencez pas en écrivant : $\underbrace{f(x) = x(x-1)(x+1)}_{\text{C'est la conclusion}} = \ldots\ldots$

4. Solution de l'équation $f(x) = 0$.

L'équation $x(x-1)(x+1) = 0$ est une équation produit nul.

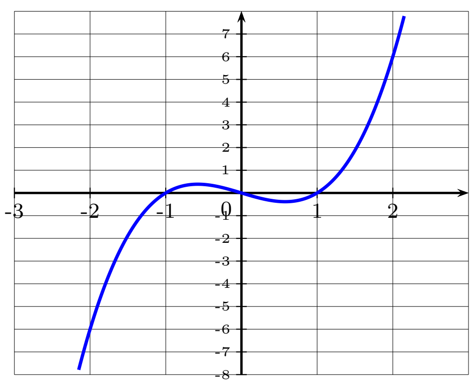
$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x(x-1)(x+1) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{ou} \quad x &= 1 \quad \text{ou} \quad x = -1 \end{aligned}$$

Automatisme

On choisit évidemment la forme factorisée de $f(x)$ pour avoir une équation produit nul.

L'équation a trois solutions : -1, 0 et 1.

Interprétation graphique : $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en -1, 0 et 1.



5. Tableau de signe de la fonction f :

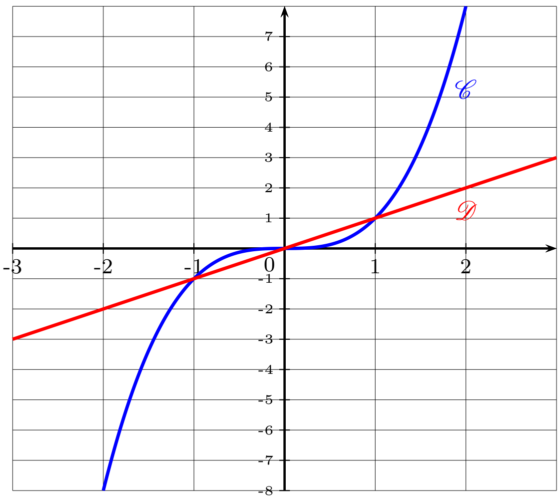
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

6. Ce tableau de signes permet de donner le signe de $x^3 - x$ en fonction de x.

Position relative

Etudier la position relative de deux courbes, c'est dire entre ces deux courbes laquelle est au-dessus de l'autre et pour quelles valeurs de x. Pour cela, bien souvent on étudie le signe de la différence entre les deux expressions algébriques (ici, $x^3 - x$). Le signe de cette différence permet de donner la position relative des deux courbes. En effet, si par exemple $x^3 - x > 0$ sur un intervalle, on pourra dire que $x^3 > x$ sur ce même intervalle. Cela signifie que les points de $\mathscr{C}$ se trouveront au-dessus des points de $\mathscr{D}$ pour ces valeurs de x. Par conséquent, $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ sur cet intervalle. Voici le tableau qui récapitule ce que je viens d'écrire :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de $x^3 - x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Inégalité		$x^3 < x$	0	$x^3 > x$	0	$x^3 < x$	0	$x^3 > x$	
Position		$\mathscr{C}$ est en-dessous de $\mathscr{D}$		$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de d		$\mathscr{C}$ est en-dessous de $\mathscr{D}$		$\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$	



Exercice 2

1. Calcul de $f\left(-\dfrac{4}{3}\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{4}{3}\right) &= 3\times\left(-\frac{4}{3}\right)^2+8\times\left(-\frac{4}{3}\right)-16\\ &= 3\times\frac{16}{9}-\frac{32}{3}-16\\ &= \frac{48}{9}-\frac{96}{9}-\frac{144}{9} \quad \text{Mise au même dénominateur.}\\ &= -\frac{192}{9}\\ &= -\frac{64}{3} \end{aligned}$$

Conseil
Vous pouvez utiliser votre calculatrice pour vérifier votre calcul.

2. a. Pour démontrer cette égalité, on développe l'expression $(3x-4)(x+4)$.

$$\begin{aligned} (3x-4)(x+4) &= 3x^2+12x-4x-16\\ &= 3x^2+8x-16\\ &= f(x) \end{aligned}$$

Explications
Pour démontrer l' égalité $f(x)=(3x-4)(x+4)$, on est parti
membre de droite et on a développé pour retrouver le membre
gauche. Faites attention de ne pas écrire la conclusion au dépa
pour être plus clair, ne commencez pas en écrivant :
$f(x)=(3x-4)(x+4)=.....$

Ainsi, pour tout réel x de $[-5\ ;\ 2]$, $f(x)=(3x-4)(x+4)$.

b. Points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.
Les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses sont donnés par les solutions de l'équation $f(x)=0$.

On prend la forme factorisée pour résoudre cette équation.

Évidemment
Si on ne prend pas la forme factorisée, on se retrouve avec une équation du second degré ($3x^2+8x+16=0$) que l'on ne sait pas encore résoudre.... patience.... ça va venir.

$$\begin{aligned} (3x-4)(x+4) &= 0 \quad \text{C'est une équation produit nul.}\\ 3x-4=0 \quad &\text{ou} \quad x+4=0\\ 3x=4 \quad &\text{ou} \quad x=-4\\ x=\frac{4}{3} \quad &\text{ou} \quad x=-4 \end{aligned}$$

La parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en $(-4\ ;\ 0)$ et $\left(\dfrac{4}{3}\ ;\ 0\right)$.

c. Résolution de l'inéquation.

On prend encore la forme factorisée.

Explications
Même si les solutions apparaissent sur le graphique donné, on attend ici une méthode algébrique.
Le graphique permettra de vérifier les solutions trouvées.

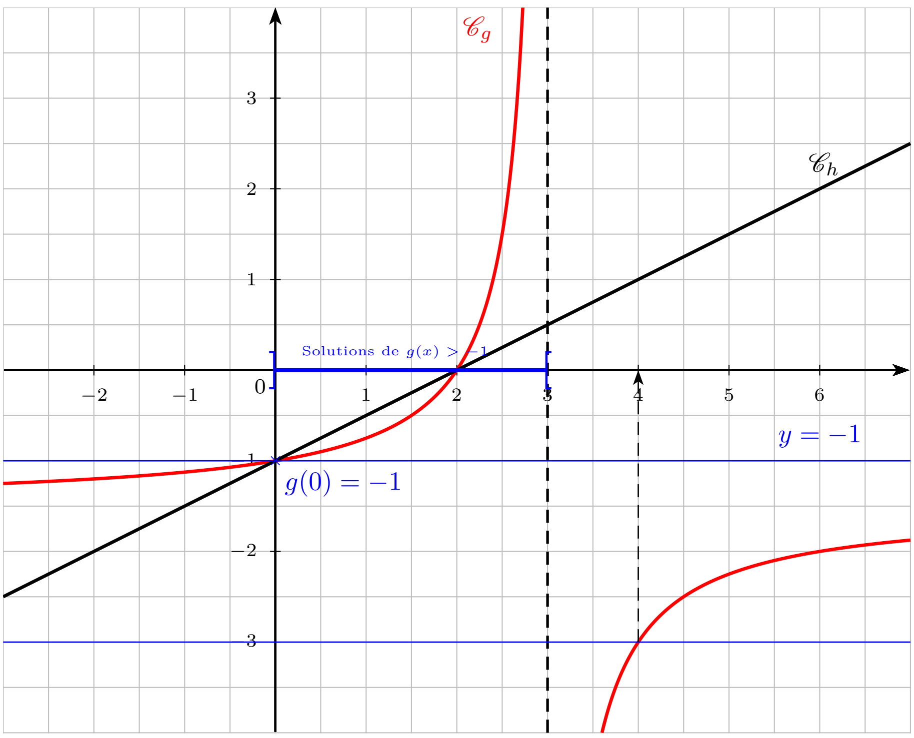
$3x-4$ s'annule pour $x=\dfrac{4}{3}$ et $x+4$ s'annule pour $x=-4$. On en déduit le tableau de signes :

x	-5		-4		$\dfrac{4}{3}$		2
Signe de $3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x)>0$ $\qquad\qquad$ $f(x)>0$

$\mathscr{S} = [-5\ ;\ -4[\cup\left]\dfrac{4}{3}\ ;\ 2\right]$. Graphiquement, cela signifie que la parabole se situe au-dessus (ou sur) de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-5\ ;\ -4[$ et sur $\left]\dfrac{4}{3}\ ;\ 2\right]$.

Exercice 3



Partie A : ***Graphiquement***

1. $g(0) = -1$.

2. L'équation $g(x) = -3$ a pour solution : 4.

Rappel

Les solutions de l'équation $g(x) = -3$ sont les antécédents de -3 par g. On les lit sur l'axe des abscisses.

3. L'inéquation $g(x) > -1$ a pour solution : $]0\ ;\ 3[$.

> **Explications**
>
> Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de la courbe qui se situent strictement au dessus de la droite (horizontale) d'équation $y = -1$. Tracez-là et surlignez les points de la courbe situés au-dessus de cette droite. Les solutions sont les abscisses de ces points.

4. Tableau de variation de la fonction g :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

> **Remarque**
>
> La fonction g est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ 3[$ et $]3\ ;\ +\infty[$.
> 3 est une valeur interdite pour la fonction g. La droite verticale d'équation $x = 3$ n'est pas traversée par la courbe.

Partie B : *Avec des calculs*

1. Tableau de signes de la fonction g.
Cette fonction est écrite sous la forme d'un quotient. On étudie donc le signe du numérateur et celui du dénominateur.
Le numérateur s'annule en $x = 2$ et le dénominateur s'annule en $x = 3$ (c'est la valeur interdite).

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Signe de $3x - 6$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $6 - 2x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

> **Explications et conseils**
>
> Au numérateur et au dénominateur il y a des fonctions affines. Revoyez comment déterminer le signe d'une fonction affine si vous avez des difficultés.
> N'oubliez pas la valeur interdite sur la dernière ligne du tableau.
> Vérifiez la cohérence avec le graphique.

2. a. La fonction h est une fonction affine.

Elle se représente donc par une droite.

Son ordonnée à l'origine est -1 et sa pente est 0,5.

> **Explications**
>
> On place le point de la droite correspondant à l'ordonnée à l'origine (coordonnées $(0\ ;\ -1)$). A partir de ce point on se décale de deux unités sur la droite puis on monte d'une unité pour faire une pente de $\dfrac{1}{2} = 0,5$ et le tour est joué !

b. On résout l'équation dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$:

$$\begin{array}{rcll}
g(x) & = & h(x) & \\
\dfrac{3x-6}{6-2x} & = & 0,5x-1 & \text{On fait un produit en croix.} \\
(0,5x-1)(6-2x) & = & 3x-6 & \\
\cancel{3x} - x^2 - \cancel{6} + 2x & = & \cancel{3x} - \cancel{6} & \text{On simplifie.} \\
-x^2+2x & = & 0 & \\
x(-x+2) & = & 0 & \text{On factorise pour obtenir une équation produit nul.} \\
x=0 & \text{ou} & -x+2=0 & \\
x=0 & \text{ou} & x=2 &
\end{array}$$

Les solutions de l'équation sont 0 et 2.

Pensez-y !

Vérifiez la cohérence de votre résultat avec le graphique. Ces solutions sont les abscisses des points d'intersection entre la droite et la courbe.

Exercice 4