MATHEMATIQUES
Inéquations : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

1. a. Comparaison de de $3a$ et $3b$:

$$\begin{aligned} a &< b \\ 3\times a &< 3\times b \text{ On multiplie par } 3>0 \\ 3a &< 3b \end{aligned}$$

b. Comparaison de de $-\dfrac{a}{3}$ et $-\dfrac{b}{3}$:

$$\begin{aligned} a &< b \\ -\frac{1}{3}\times a &> -\frac{1}{3}\times b \quad \text{On multiplie par } -\frac{1}{3}<0 \\ -\frac{a}{3} &> -\frac{b}{3} \end{aligned}$$

c. Comparaison de de $1-2a$ et $1-2b$:

$$\begin{aligned} a &< b \\ -2\times a &> -2\times b \quad \text{On multiplie par } -2<0 \\ 1-2a &> 1-2b \quad \text{On ajoute 1} \end{aligned}$$

Méthode

Procédez par étapes :
Pour fabriquer $1-2a$ et $1-2b$ il faut commencer par comparer $-2a$ avec $-2b$, puis on ajoute 1. Ne pas oublier les règles dans les inégalités.

2. a. Encadrement de $\sqrt{2}-5$.

$$\begin{aligned} 1,4 &< \sqrt{2} < 1,5 \\ 1,4-3 &< \sqrt{2}-3 < 1,5-3 \quad \text{On retranche 3} \\ -1,6 &< \sqrt{2}-3 < -1,5 \end{aligned}$$

b. Encadrement de $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

$$\begin{aligned} 1,4 &< \sqrt{2} < 1,5 \\ 1,4\times\frac{1}{4} &< \sqrt{2}\times\frac{1}{4} < 1,5\times\frac{1}{4} \quad \text{On multiplie par } \frac{1}{4}>0 \\ 0,35 &< \frac{\sqrt{2}}{4} < 0,375 \end{aligned}$$

Vous le saviez !

$\dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{1}{4}\times\sqrt{2}$.

c. Encadrement de $-2\sqrt{2}+6$.

$$\begin{aligned} 1,4 &< \sqrt{2} < 1,5 \\ 1,4\times(-2) &> \sqrt{2}\times(-2) > 1,5\times(-2) \quad \text{On multiplie par } -2<0 \\ -2,8 &> -2\sqrt{2} > -3 \\ -2,8+6 &> -2\sqrt{2}+6 > -3+6 \quad \text{On ajoute 6} \\ 3,2 &> -2\sqrt{2}+6 > 3 \end{aligned}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned}
3(x+5) &\geqslant -2(x+10) \\
3\times x+3\times 5 &\geqslant -2\times x-2\times 10 \qquad \textcolor{blue}{\text{On développe}} \\
3x+15 &\geqslant -2x-20 \\
3x+2x &\geqslant -20-15 \\
5x &\geqslant -35 \qquad \textcolor{blue}{\text{On isole les } x} \\
x &\geqslant \frac{-35}{5} \qquad \textcolor{blue}{\text{On divise par } 5>0} \\
x &\geqslant -7
\end{aligned}$$

Les solutions sont les nombres supérieurs ou égaux à -7 soit $[-7\ ;\ +\infty[$.

$$\begin{aligned}
-5x+2 &> 2(x-6) \\
-5x+2 &> 2\times x-2\times 6 \\
-5x+2 &> 2x-12 \\
-5x-2x &> -12-2 \\
-7x &> -14 \\
x &< \frac{-14}{-7} \qquad \textcolor{blue}{\text{On divise par } -7<0} \\
x &< 2
\end{aligned}$$

Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à 2 soit $]-\infty\ ;\ 2[$.

$$\begin{aligned}
\frac{4x+1}{3} &< 1 \\
3\times\left(\frac{4x+1}{3}\right) &< 1\times 3 \\
4x+1 &< 3 \\
4x &< 3-1 \\
4x &< 2 \\
x &< \frac{2}{4} \\
x &< \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Astuce
Pour ne plus avoir de quotient, on multiplie les deux membres par 3.

Les solutions de cette inéquation sont les nombres strictement inférieurs à $\frac{1}{2}$ soit $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\right[$.

Exercice 3

Modélisation
Pour modéliser le problème :
On commence par désigner par une inconnue le nombre de contrats cherchés.
On traduit le problème posé par une inéquation.
On résout l'inéquation puis on conclut.

- On note x le nombre de contrats que le représentant vend.
- Son salaire est donné par : fixe + 52 € par objets vendu soit $800+52\times x$.

- On cherche x de façon que $800+52x>2300$.

$$\begin{aligned}
800+52x &> 2300 \\
52x &> 2300-800 \\
x &> \frac{1500}{52}(\simeq 28,8)
\end{aligned}$$

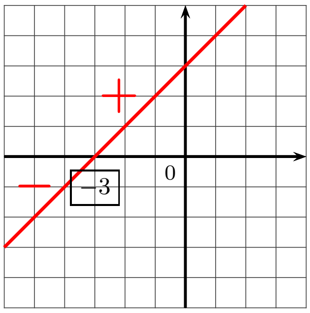
Le représentant doit vendre au moins 29 contrats pour obtenir un salaire d'au moins 2300 €.

Exercice 4

- $f(x) = x + 3$

$$\begin{aligned} x + 3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

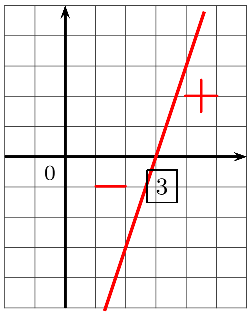


Conseil
En représentant rapidement f, on voit très bien les signes. A gauche de -3, les images sont négatives et à droite de -3, les images sont positives.

- $g(x) = 3x - 9$

$$\begin{aligned} 3x - 9 &= 0 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

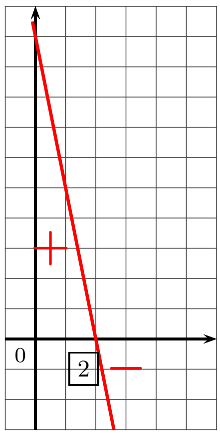


Les signes
Le signe de m se met à droite de la valeur qui annule la fonction. C'est une règle qui vous pouvez connaître.

- $h(x) = 10 - 5x$

$$\begin{aligned} 10 - 5x &= 0 \\ -5x &= -10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$



Les signes
Signe de m à droite, c'est donc négatif à droite de la valeur 2.

Exercice 5

1. a. $x+7$ s'annule pour $x=-7$ et $-2x+8$ s'annule pour $x=4$. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-7		4		$+\infty$
Signe de $x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-2x+8$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. $\mathscr{S}=]-\infty\ ;\ -7[\cup]4\ ;\ +\infty[$.

Explications

C'est sur la dernière ligne du tableau qu'apparaît le signe de $f(x)$. Les solutions de l'inéquation $f(x)<0$ se lisent sur la première ligne du tableau.

2. a. On factorise $4-16x^2$ qui est une différence de deux carrés.

$$\begin{aligned} 4-16x^2 &= \underbrace{2^2}_{a^2}-\underbrace{(4x)^2}_{b^2} \\ &= \underbrace{(2-4x)}_{(a-b)}\underbrace{(2+4x)}_{(a+b)} \end{aligned}$$

Attention

On ne vous donnera pas tout le temps la méthode pour cette factorisation. Vous devez reconnaître une différence de deux carrés et savoir la factoriser.

b. $2-4x$ s'annule pour $x=0,5$ et $2+4x$ s'annule pour $x=0,5$. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$0{,}5$		$+\infty$
Signe de $2-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $2+4x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $4-16x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Méthode

- La résolution de cette inéquation passe par un tableau de signe. La factorisation demandée à la question précédente vous servira pour cette question.
- Les signes de $2+4x$ et $2-4x$ s'obtiennent grâce aux signes des fonctions affines (signe de m à droite de la valeur qui annule).

Ainsi, l'inéquation $4-16x^2\geqslant 0$ a pour ensemble de solutions $[-0,5\ ;\ 0,5]$.

Exercice 6

1. $x-6$ s'annule en $x=6$. Donc l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}\smallsetminus\{6\}$.

2.

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
Signe de $2x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Conseils

On dresse le tableau de signes d'un quotient comme celui d'un produit. La différence c'est la (ou les) valeurs interdites sur la dernière du tableau. La règle des signes est la même (+ par + donne + (+ diviser par + donne +) etc ...) Je ne suis pas sûr d'être très clair là.

3. Pour résoudre cette inéquation, on le tableau de signe de $f(x)$.
$\mathscr{S}=[2\ ;\ 6[$.

Exercice 7

1. On étudie le signe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (3x+4)(-2x+6)$.
Recherche des valeurs qui annulent :

- $3x + 4 = 0$ implique $x = -\dfrac{4}{3}$.
- $-2x + 6 = 0$ implique $x = 3$.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les solutions de cette inéquation sont les nombres de l'ensemble $\left]-\infty; -\dfrac{4}{3}\right] \cup [3; +\infty[$.

2. On étudie le signe de la fonction l définie par $l(x) = \dfrac{3x-5}{2x+7}$.

- Recherche de la valeur interdite :

$2x + 7 \neq 0$ implique $x \neq -\dfrac{7}{2}$.

Donc l est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{7}{2}\right\}$.

- Recherche de la valeur qui annule l :

$3x - 5 = 0$ implique $x = \dfrac{5}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$l(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Attention

Cela va sans dire mais je le dis quand même. Les nombres sur la première ligne doivent être rangés dans l'ordre croissant.

Les solutions de l'inéquation $\dfrac{3x-5}{2x+7} > 0$ sont les nombres de l'ensemble $\left]-\infty; -\dfrac{7}{2}\right[\cup \left]\dfrac{5}{3}; +\infty\right[$.