MATHEMATIQUES
Les nombres : entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

1. $\dfrac{25\,920}{32\,256} = \dfrac{2^6 \times 3^4 \times 5}{2^9 \times 3^2 \times 7} = \dfrac{3^2 \times 5}{2^3 \times 7} = \dfrac{9 \times 5}{8 \times 7} = \dfrac{45}{56}$.

2. $\sqrt{25\,920} = \sqrt{2^6 \times 3^4 \times 5} = \sqrt{2^6 \times 3^4} \times \sqrt{5} = \sqrt{(2^3)^2 \times (3^2)^2} \times \sqrt{5} = 2^3 \times 3^2 \times \sqrt{5} = 72\sqrt{5}$.

3. $836\,075\,520 = 25\,920 \times 32\,256 = 2^6 \times 3^4 \times 5 \times 2^9 \times 3^2 \times 7 = 2^{6+9} \times 3^{4+2} \times 5 \times 7 = 2^{15} \times 3^6 \times 5 \times 7$.

Exercice 2

$$\begin{aligned}
A &= 2\sqrt{16 \times 3} - \sqrt{25 \times 3} + 3\sqrt{36 \times 3} \\
&= 2 \times \sqrt{16} \times \sqrt{3} - \sqrt{25} \times \sqrt{3} + 3 \times \sqrt{36} \times \sqrt{3} \\
&= 2 \times 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 3 \times 6\sqrt{3} \\
&= (8 - 5 + 18)\sqrt{3} \\
&= 21\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= 3\sqrt{4 \times 5} - \sqrt{9 \times 5} + 2\sqrt{25 \times 5} \\
&= 3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} - \sqrt{9} \times \sqrt{5} + 2 \times \sqrt{25} \times \sqrt{5} \\
&= 3 \times 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2 \times 5\sqrt{5} \\
&= (6 - 3 + 10)\sqrt{5} \\
&= 13\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Exercice 3

a. $A = 2\,384\,602 = 2{,}384\,602 \times 10^6$ et $B = 0{,}000\,469\,2 = 4,692 \times 10^{-4}$.

b.

$$\begin{aligned}
A \times B &= 2\,384\,602 \times 0{,}000\,469\,2 \\
&= 2{,}384\,602 \times 10^6 \times 4,692 \times 10^{-4} \\
&= 2{,}384\,602 \times 4,692 \times 10^6 \times 10^{-4} \\
&= 11{,}746\,549\,45 \times 10^2 \\
&= 1{,}174\,654\,945 \times 10 \times 10^2 \\
&= 1{,}174\,654\,945 \times 10^3
\end{aligned}$$

Exercice 4

$\mathscr{P}_{\text{rectangle}} = 2L + 2\ell$ d'où

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{\text{ABCD}} &= 2AB + 2BC \\ &= 2 \times (4+\sqrt{3}) + 2 \times (4-\sqrt{3}) \\ &= 2 \times 4 + 2 \times \sqrt{3} + 2 \times 4 - 2 \times \sqrt{3} \\ &= 8 + 2\sqrt{3} + 8 - 2\sqrt{3} \\ &= 16 \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

$\mathscr{A}_{\text{rectangle}} = L \times \ell$ d'où

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{\text{ABCD}} &= AB \times BC \\ &= (4+\sqrt{3}) \times (4-\sqrt{3}) \\ &= 4 \times 4 - 4 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 4 - \sqrt{3} \times \sqrt{3} \\ &= 16 - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 3 \\ &= 13 \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Exercice 5

- Pour la première façade :
  Les trois frères peignent au total la somme de chacune de leur part de travail, soit $\frac{1}{6} + \frac{3}{7} + \frac{4}{21}$:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{7} + \frac{4}{21} = \frac{1 \times 7}{6 \times 7} + \frac{3 \times 6}{7 \times 6} + \frac{4 \times 2}{21 \times 2} = \frac{7+18+8}{42} = \frac{33}{42} = \frac{3 \times 11}{3 \times 14} = \frac{11}{14}$$

- Pour la seconde façade :
  Les trois frères peignent au total la somme de chacune de leur part de travail, soit $\frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{5}{14}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{5}{21} = \frac{1 \times 7}{1 \times 7} + \frac{1 \times 2}{7 \times 2} + \frac{5}{14} = \frac{7+2+5}{14} = \frac{14}{14} = 1$$

Les trois frères ont été plus efficaces pour la seconde façade car ils l'ont peignée dans sa totalité contrairement à la première.

Exercice 6

Soit n un nombre entier naturel.

- Choisir un nombre entier naturel :
  n ;
- Ajouter 4 à ce nombre :
  $n+4$;
- Multiplier le résultat par 3 :
  $(n+4) \times 3 = 3n + 12$;
- Ajouter le double du nombre de départ :
  $(n+4) \times 3 + 2n = 3n + 12 + 2n = 5n + 12$;
- Ajouter 3 au résultat : $(n+4) \times 3 + 2n + 3 = 5n + 15$.

Cela ne suffit pas !
Calculer le résultat final avec des valeurs particulières de nombres au départ ne suffit pas ! Il faut utiliser le calcul littéral pour apporter une preuve du résultat.

Montrer que le résultat obtenu est un multiple de 5 quelque soit le nombre entier naturel choisi au départ.

En factorisant par 5 le résultat final $N = 5n + 15$, on obtient $N = 5 \times \underbrace{(n+3)}_{k}$.

En posant $k = n + 3$, on vient de montrer qu'il existait un entier naturel k tel que $N = 5 \times k$ et, par conséquent, le résultat final est un multiple de 5.