MATHEMATIQUES
Proportions et évolutions : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

Le cours !

La proportion (ou fréquence) d'une sous-population A dans la population E (ou proportion des individus de A parmi ceux de E) est le nombre noté p donné par :

$$p = \frac{n_A}{n_E}$$

où E est dite la population de référence.

1. a. La proportion de places assises est donnée par le quotient :

$$\frac{\text{Nombre de places assises}}{\text{Nombre total de places}} = \frac{9000}{30000} = 0,3$$

Remarque

Une proportion peut-être donnée sous forme de fraction irréductible, sous forme décimale, sous forme de pourcentage.
Par exemple, on peut dire ici qu 30 % des places dans cette salle sont des places assises.

b. Première méthode :
La proportion des places debout est donnée par :

$$\frac{\text{Nombre de places debout}}{\text{Nombre total de places}} = \frac{12000}{30000} = 0,7$$

Deuxième méthode :
La proportion des places debout est donnée par :

$$1 - 0,3 = 0,7$$

Remarque

Évidemment quand on fait la somme des proportions des places debout et assises, on trouve 1, non ?

2. a. On cherche le nombre de candidats reçus à l'examen. Notons x ce nombre.

Comme 88,4 % de x vaut 221, on a : $0,884 \times x = 221$.
D'où $x = \frac{221}{0,884} = 250$.

Il y a 250 candidats à cet examen.

Autrement

On repart de la formule $p = \frac{n_A}{n_E}$. On connaît p et n_A. On cherche n_E.
En remplaçant dans cette formule, on obtient : $0,884 = \frac{221}{n_E}$.
Le produit en croix donne $0,884 \times n_E = 221$, soit $n_E = \frac{221}{0,884}$.

b. Le taux de réussite est de 95 %. Cela signifie que le taux d'échec est de 5 %.

Le nombre de candidats refusés est de 12. On a donc :

$$0,05 = \frac{12}{N}$$

Remarque

La difficulté ici est que ce n'est pas le nombre d'élèves reçus qui est donné mais celui des refusés. Ce sont les 5 % des candidats qui représentent 12 élèves.

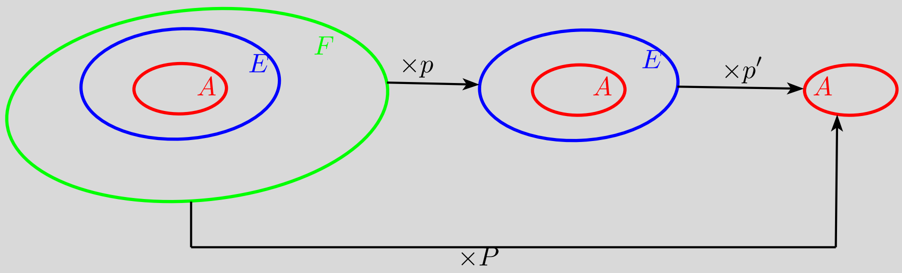
$$
\begin{aligned}
0,05 &= \frac{12}{N} \\
0,05 \times N &= 12 \quad \textcolor{blue}{\text{Par produit en croix.}} \\
N &= \frac{12}{0,05} \quad \textcolor{blue}{\text{En divisant par 0,05 de chaque côté.}} \\
N &= 240
\end{aligned}
$$

Ce lycée a présenté 240 candidats.

Exercice 2

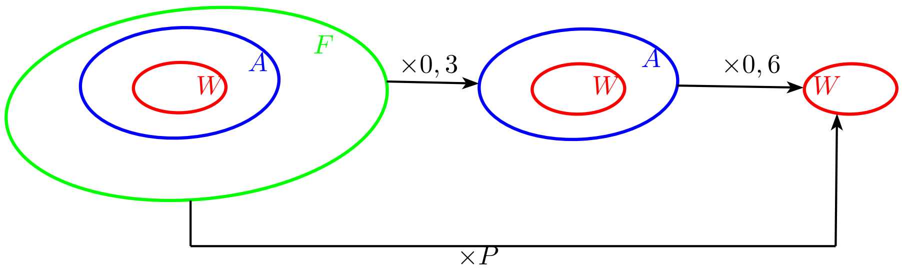
Le cours !

Dans des exercices sur des proportions échelonnées (proportions de proportions) comme ici, il est nécessaire de bien identifier les trois populations mis en jeu. Ces populations sont imbriquées les unes dans les autres. Si p représente la proportion de E dans F et p' la proportion de A dans E, on a le schéma suivant :



On obtient $P = p \times p'$ et P est la proportion de A dans F.

1. En notant F les films favoris de Nabolos, A, les films d'action et W les films avec B. Willis, on obtient le schéma :

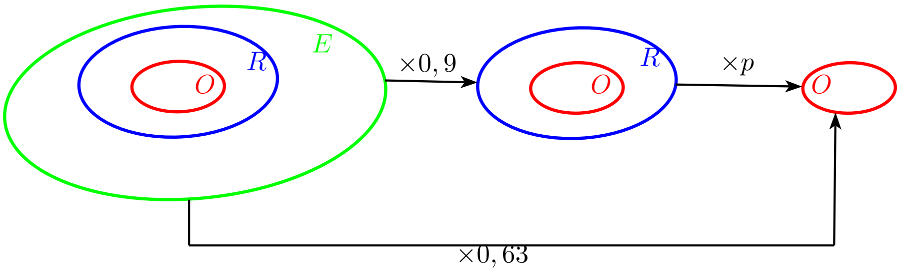


On n'oublie pas !

Pour prendre 30 % d'une quantité, on la multiplie par 0,3.
Ici, 30 % des films favoris de Nabolos sont des films d'action. En multipliant par 0,3 le nombre de film favoris de Nabolos, on obtient le nombre de films d'action.

On obtient $P = 0,3 \times 0,6 = 0,18$. Ainsi les films d'action avec B. Willis représentent 18 % des films favoris de Nabolos.

2. En notant E l'électricité consommée par l'usine, R les énergies renouvelables et O l'énergie fournie par les éoliennes, on obtient le schéma :



Attention

Après avoir bien identifié les différentes populations mises en jeu, vous devez bien faire attention aux proportions qui sont données. Par exemple ici, 63 % de l'électricité globale consommée par l'entreprise est fournie par les éoliennes. Donc en multipliant par 0,63 l'effectif de la population E, on obtient l'effectif de la population O.

On obtient $0,63 = 0,9 \times p$, soit $p = \dfrac{0,63}{0,9} = 0,7$. Ainsi l'énergie fournie par les éoliennes représentent 70 % des énergies renouvelables.

Exercice 3

Coefficient multiplicateur

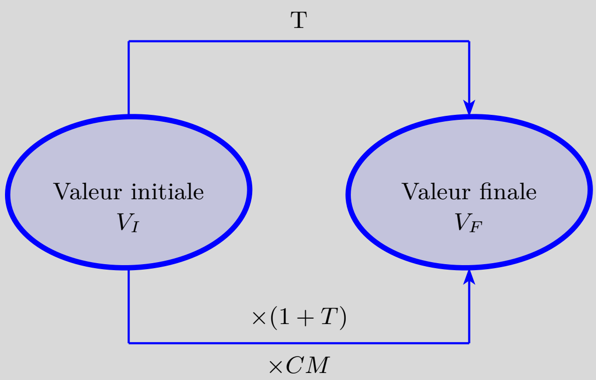
Le coefficient multiplicateur est le nombre qui multiplié par la valeur initiale permet d'obtenir la valeur finale.
Ainsi, $V_I \times CM = V_F$. Ainsi, $CM = \dfrac{V_F}{V_I}$.
Le taux d'évolution est le nombre T défini par :

$$T = \frac{V_F - V_I}{V_I}$$

On a donc $T = \dfrac{V_F}{V_I} - \dfrac{V_I}{V_I} = \underbrace{\dfrac{V_F}{V_I}}_{=CM} - 1$.

On a donc $T = CM - 1$ ou $CM = 1 + T$.

Et aussi, $V_F = (1 + T) \times V_I$.



A une augmentation, on associe un coefficient multiplicateur plus grand que 1 et à une diminution on associe un coefficient multiplicateur compris entre 0 et 1.

- Pour calculer le taux d'évolution connaissant le coefficient multiplicateur, on utilise :

$$CM = 1 + T$$

Par exemple, le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 10 % est donné par :

$$CM = 1 - 0,1 = 0,9$$

- Pour calculer le coefficient multiplicateur connaissant le taux d'évolution, on utilise :

$$T = CM - 1$$

Par exemple, le taux d'évolution associé à un coefficient multiplicateur de 0,85 est donné par :

$$T = 0,85 - 1 = -0,15 = -15\%$$

Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur
$+5$ %	$1+0,05=1,05$
-15 %	$1-0,15=0,85$
$+45$ %	$1+0,45=1,45$
-12 %	$1-0,12=0,88$
$1,12-1=0,12=+12\%$	1,12
$0,84-1=-0,16=-16\%$	0,84
-51 %	$1-0,51=0,49$
$1,84-1=0,84=+84\%$	1,84
$+1,2$ %	$1+0,012=1,012$
$-0,5$ %	$1-0,005=0,995$

Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur
$+21$ %	$1+0,21=1,21$
-24 %	$1-0,24=0,76$
$0,45-1=-0,55=-55\%$	0,45
$0,74-1=-0,26=-26\%$	0,74
$1,08-1=0,08=+8\%$	1,08
$1,84-1=0,84=+84\%$	1,84
$-0,1$ %	$1-0,001=0,999$
$+2,12\%$	$1+0,0212=1,0212$
$0,69-1=-0,31=-31\%$	0,69
$1,102-1=0,102=+10,2\%$	1,102

Exercice 4

1. Le taux d'évolution est donné par :

$$T=\frac{V_F-V_I}{V_I}=\frac{2650-2000}{2000}=0,325$$

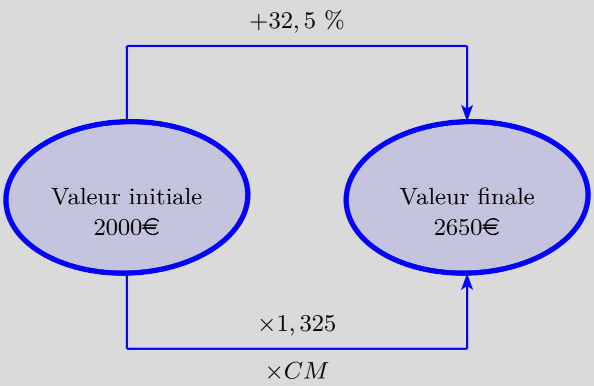
Le taux d'évolution est + 32,5 %.

Pour bien comprendre

Comme $2000\times CM=2650$, le coefficient multiplicateur correspondant à cette augmentation est donné par :

$$CM=\frac{2650}{2000}=1,325$$

$T=1,325-1=0,325$. L'augmentation est de 32,5 %.



2. Le taux d'évolution est donné par :

$$T=\frac{V_F-V_I}{V_I}=\frac{300-1000}{1000}=-0,7$$

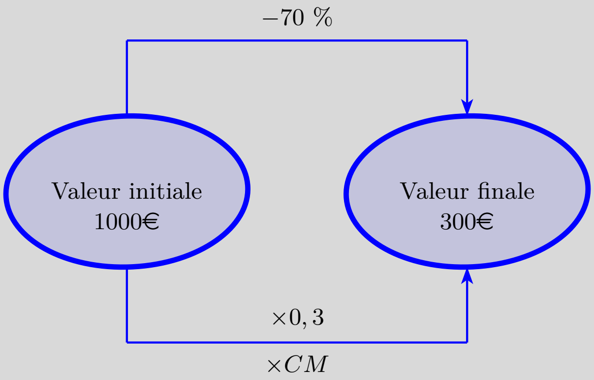
Le taux d'évolution est -70 %.

Pour bien comprendre

Comme $1000 \times CM = 300$, le coefficient multiplicateur correspondant à cette augmentation est donné par :

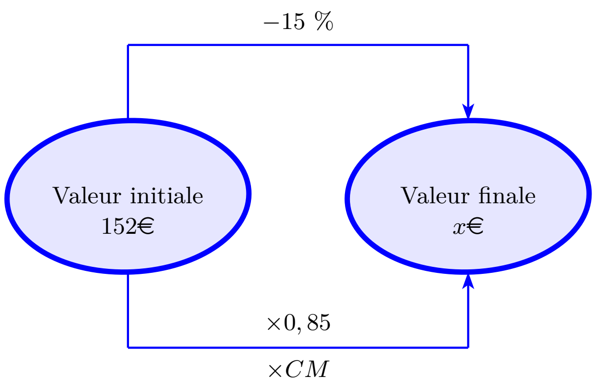
$$CM = \frac{300}{1000} = 0,3$$

$T = 0,3 - 1 = -0,7$. Le taux d'évolution est donc : -70 %.



Exercice 5

1. $1 - 0,15 = 0,85$. Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 15 % est 0,85. La situation est donc la suivante :

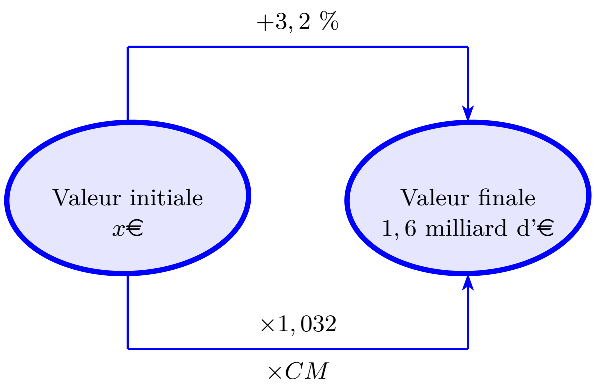


$x = 152 \times 0,85 = 129,20$.
Le prix de cet appareil électroménager en 2019 est 129,20 €.

2. $1+0,032 = 0,85$. Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 15 % est 0,85. La situation est donc la suivante :

Le CM

$CM = 1 + T$ avec $T = +3,2\% = +0,032$.



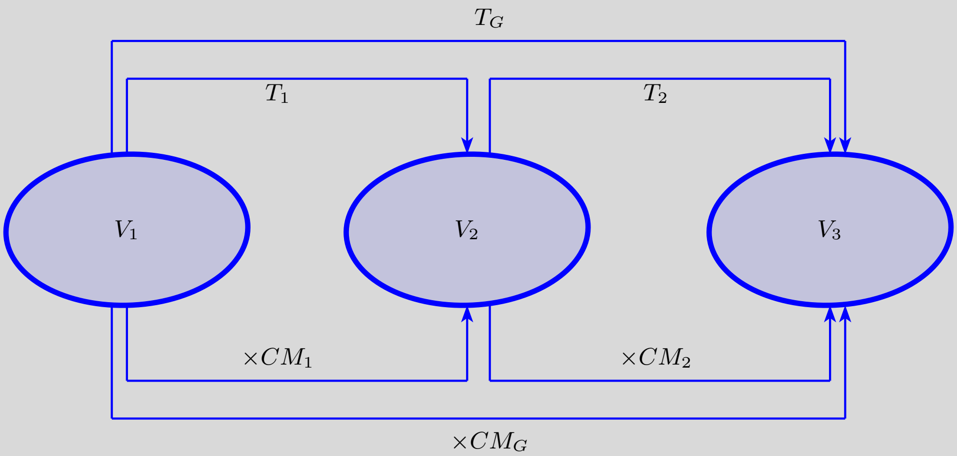
$x \times 1,032 = 1,6$, soit $x = \dfrac{1,6}{1,032} = 1,55$
Le PIB de ce pays un an avant était de 1,55 milliard d' €.

Exercice 6

Evolutions successives

Le coefficient multiplicateur global s'obtient en faisant le produit des coefficients multiplicateurs associés aux évolutions.
Ainsi,

$$CM_G = CM_1 \times CM_2$$



Par exemple, le coefficient multiplicateur global associé aux évolutions + 10 % et -15% est donné par :

$$CM_G = 1,1 \times 0,85 = 0,935$$

Le taux global d'évolution est donc :

$$T_G = 0,935 - 1 = -0,065 = -6,5\%$$

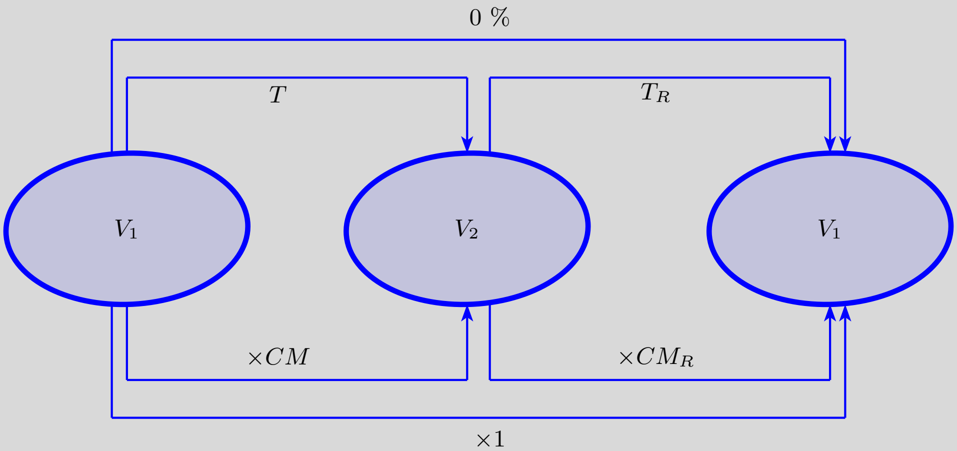
Evolution 1	**Evolution 2**	CM_{Global}	T_{Global}
+5 %	+25 %	1,3125	$+31,25$ %
+10 %	+30 %	$1,1 \times 1,3 = 1,43$	$1,43 - 1 = 0,43 = +43$ %
+20 %	−30 %	$1,2 \times 0,7 = 0,84$	$0,84 - 1 = -0,16 = -16$ %
−8 %	−12 %	$0,92 \times 0,88 = 0,8096$	$0,8096 - 1 = -0,1904 = -19,04$ %
+4 %	+2 %	$1,04 \times 1,02 = 1,0608$	$1,0608 - 1 = 0,0608 = +6,08$ %
−60 %	+30 %	$0,4 \times 1,3 = 0,52$	$0,52 - 1 = -0,48 = -48$ %
+15 %	−26 %	$1,15 \times 0,74 = 0,851$	$0,851 - 1 = -0,149 = -14,9$ %

Exercice 7

Evolution réciproque

Le coefficient multiplicateur global est 1 !!! Il fallait y penser. On veut revenir à la valeur initiale et c'est bien $V_I \times 1$ qui donne V_I.
On a ainsi, $CM \times CM_R = 1$, donc le coefficient multiplicateur réciproque est donné par :

$$CM_R = \frac{1}{CM}$$



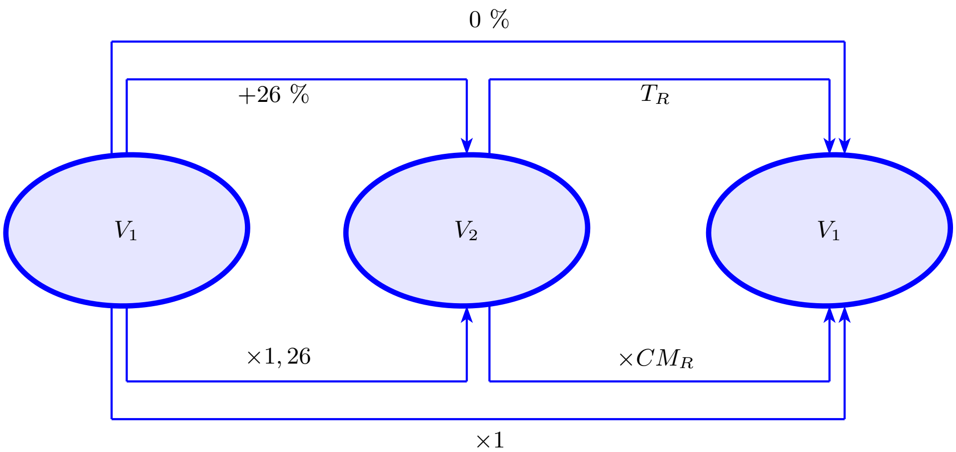
Par exemple, le coefficient multiplicateur réciproque de +10% est $CM_R = \dfrac{1}{1,1} \simeq 0,909$.

Le taux d'évolution réciproque est donc :

$$T_R \simeq 0,909 - 1 = -0,091 = -9,1\%$$

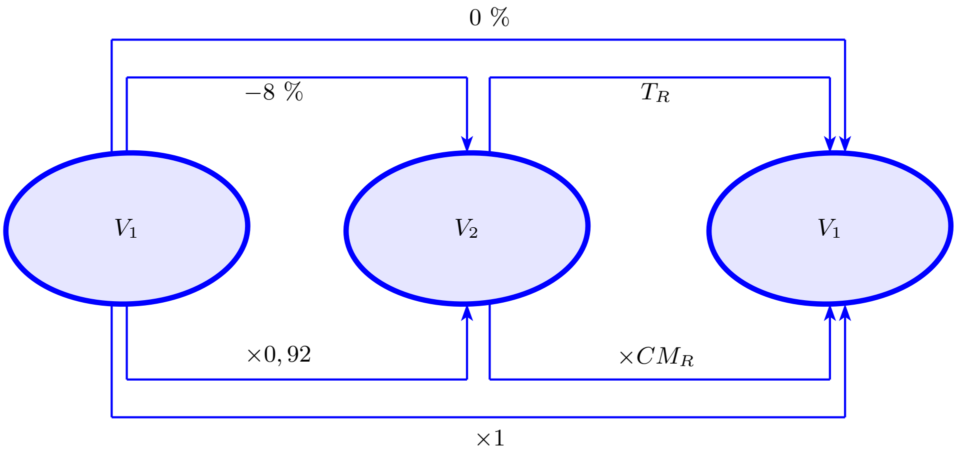
C'est donc une baisse de 9,1 % qui compense une hausse de 10 %.

1. Voici la situation résumée : :



$CM_R = \dfrac{1}{1,26} \simeq 0,794$.
$T_R \simeq 0,794 - 1 = -0,206$ soit $-20,6$ %.
Le pourcentage de réduction qu'il doit consentir est de 20,6 %.

2. Voici la situation résumée :



$CM_R = \dfrac{1}{0,92} \simeq 1,087$.
$T_R \simeq 1,087 - 1 = 0,087$ soit +8,7 %.
Le taux d'évolution au cours de la journée de mercredi a été de $+8,7$ %.