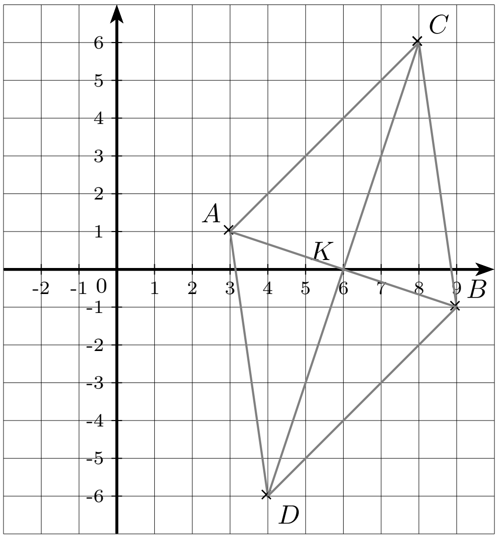
MATHEMATIQUES
Repérage et problèmes de géométrie : entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

1.



2. a. $ACBD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.
Les diagonales de $ACBD$ sont $[AB]$ et $[CD]$.
En notant K le milieu de $[AB]$ et L le milieu de $[CD]$, on obtient :

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+9}{2} = 6.$$

$$y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0.$$

Ainsi $K(6\ ;\ 0)$.

$$x_L = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{8+4}{2} = 6.$$

$$y_L = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{6+(-6)}{2} = 0.$$

Ainsi $L(6\ ;\ 0)$.

Les points K et L ont les mêmes coordonnées. Ils sont donc confondus.
Les diagonales de $ACBD$ se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.

Méthode

Donnez des noms différents aux deux milieux et montrez qu'il s'agit en fait du même point en calculant leurs coordonnées.

b. On calcule AC :

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} \\ &= \sqrt{(5)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{25+25} \\ &= \sqrt{50} \end{aligned}$$

Pensez-y !

Pour déterminer la nature exacte du triangle ABC, vous devez penser à calculer la longueur qu'il manque c'est-à-dire AC.
Remarquez quand même que le triangle n'est pas rectangle !

Aini, on constate que $BC = AC$. Donc ABC est isocèle en C.

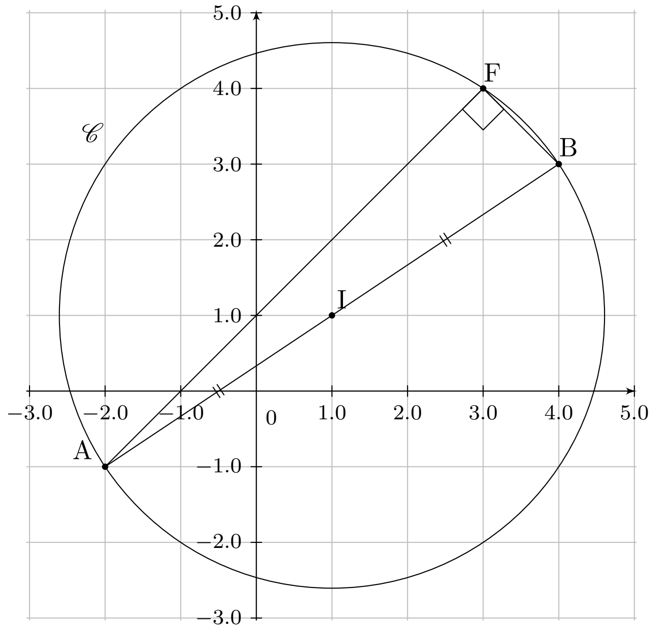
c. Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.
Ici, $ACBD$ est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un losange.

Exercice 2

1. Soit I le centre du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$. Le point I est donc le milieu du segment $[AB]$. On peut alors calculer ses coordonnées :

$$\begin{aligned} x_{\text{I}} &= \frac{x_{\text{A}} + x_{\text{B}}}{2} \\ &= \frac{-2+4}{2} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_{\text{I}} &= \frac{y_{\text{A}} + y_{\text{B}}}{2} \\ &= \frac{-1+3}{2} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Le centre I du cercle $\mathscr{C}$ a pour coordonnées $(1\ ;\ 1)$.



2. Pour déterminer le rayon du cercle $\mathscr{C}$, on calcule la longueur du segment $[IA]$:

$$\begin{aligned} \text{IA} &= \sqrt{(x_{\text{A}} - x_{\text{I}})^2 + (y_{\text{A}} - x_{\text{I}})^2} \\ &= \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{9+4} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

On déduit que le rayon du cercle $\mathscr{C}$ vaut $R = \sqrt{13}$.

Remarque

On aurait également pu déterminer R en calculer IB ou en divisant par 2 la longueur du diamètre $[AB]$.

3.

On calcule donc la longueur du segment [IF] :

$$\begin{aligned} IF &= \sqrt{(x_{\text{F}} - x_{\text{I}})^2 + (y_{\text{F}} - x_{\text{I}})^2} \\ &= \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{4+9} \\ &= \sqrt{13} = R \end{aligned}$$

On en déduit que le point F appartient bien au cercle $\mathscr{C}$.

4. Ici, le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ est circonscrit au triangle ABF.

Le triangle ABF est donc rectangle en F.

Encore à savoir

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre I et de rayon R et M un point du plan.
Le point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $\text{IM} = R$.

Exercice 3

Explications

Il s'agit de bien étudier l'énoncé afin de bien comprendre ce que l'on cherche et surtout comment trouver la solution.
L'idée essentielle de cet exercice est que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
Pour déterminer les coordonnées du point T, sachant que $TEGM$ est un parallélogramme, il faut d'abord déterminer les coordonnées du milieu de $[ME]$. Facile car on a toutes les coordonnées. Puis à l'aide de ces coordonnées et sachant que ce milieu est aussi le milieu de $[GT]$, on pourra se débrouiller pour trouver les coordonnées du point T. A vous de jouer, essayez !

Les deux diagonales $[ME]$ et $[TG]$ du parallélogramme $TEGM$ se coupent leur même milieu.
Soit I le milieu de $[ME]$. On peut alors déterminer ses coordonnées :

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{I}} &= \frac{x_{\mathrm{M}} + x_{\mathrm{E}}}{2} \\ &= \frac{1{,}26 + 3{,}2}{2} \\ &= \frac{4{,}46}{2} \\ &= 2{,}23 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_{\mathrm{I}} &= \frac{y_{\mathrm{M}} + y_{\mathrm{E}}}{2} \\ &= \frac{1{,}78 + 0{,}56}{2} \\ &= \frac{2{,}34}{2} \\ &= 1{,}17 \end{aligned}$$

Le point I de coordonnées $(2{,}23\ ;\ 1{,}17)$ est également le milieu de seconde diagonale $[TG]$. D'où :

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{I}} = \frac{x_{\mathrm{T}} + x_{\mathrm{G}}}{2} &\iff 2{,}23 = \frac{x_{\mathrm{T}} + 3{,}46}{2} \\ &\iff 2 \times 2{,}23 = \frac{x_{\mathrm{T}} + 3{,}46}{2} \times 2 \\ &\iff 4{,}46 = x_{\mathrm{T}} + 3{,}46 \\ &\iff x_{\mathrm{T}} = 4{,}46 - 3{,}46 = 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_{\mathrm{I}} = \frac{y_{\mathrm{T}} + y_{\mathrm{G}}}{2} &\iff 1{,}17 = \frac{y_{\mathrm{T}} + 2{,}28}{2} \\ &\iff 2 \times 1{,}17 = \frac{y_{\mathrm{T}} + 2{,}28}{2} \times 2 \\ &\iff 2{,}34 = y_{\mathrm{T}} + 2{,}27 \\ &\iff y_{\mathrm{T}} = 2{,}34 - 2{,}27 = 0{,}06 \end{aligned}$$

On en déduit que le trésor se trouve au point T de coordonnées $(1\ ;\ 0{,}06)$.