MATHEMATIQUES
Variations et extremums entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

1. La fonction racine carrée est bien une fonction de retouche. En effet :

0,45	0,63
0,77	0,89

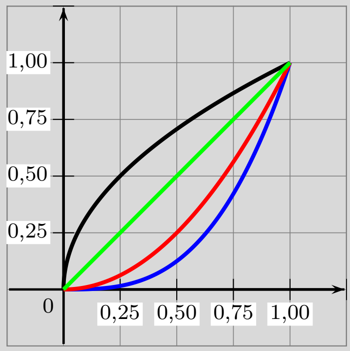
- $\sqrt{0} = 0$.
- $\sqrt{1} = 1$
- La fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

2. a. La fonction cube est bien une fonction de retouche. En effet :

- $0^3 = 0$.
- $1^3 = 1$
- La fonction cube est croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

Position relative à connaître

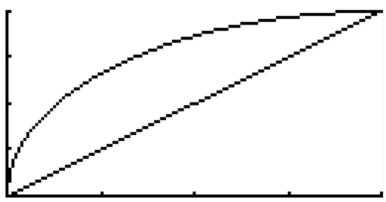
En bleu : $x \longmapsto x^3$;
En rouge : $x \longmapsto x^2$;
En vert : $x \longmapsto x$
En noir : $x \longmapsto \sqrt{x}$.



b. Sur $[0\ ;\ 1]$, on a $x^3 < x$, ainsi, la fonction cube est une fonction de retouche qui éclaircit l'image.

c. Sur $[0\ ;\ 1]$, on a $x^3 < x^2$, ainsi, la fonction cube éclaircit davantage l'image que la fonction carré.

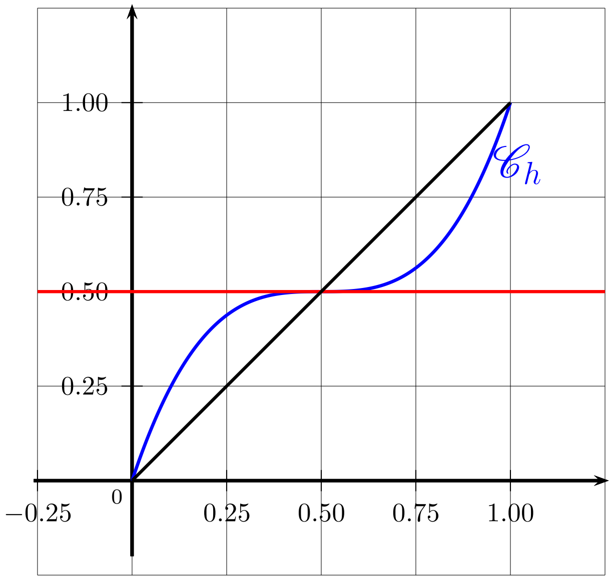
3. On trace la fonction g ainsi que la fonction $x \longmapsto x$ avec une calculatrice :



Clairement, la courbe qui représente la fonction g se situe au-dessus de la droite d'équation $y = x$. Ainsi, on peut dire que la fonction g assombrit l'image.

4. a. On a $4 \times 0,5^3 - 6 \times 0,5^2 + 3 \times 0,5 = 0,5$. On peut donc dire que 0,5 est solution de l'équation $h(x) = x$.

b. Graphiquement, l'inéquation $h \leqslant x$ a pour ensemble de solution : $[0,5\ ;\ 1]$.



Graphiquement

On trace la droite d'équation $y = x$ et on lit les abscisses des points de $\mathscr{C}_h$ qui sont en dessous de cette droite. De plus, on sait que le point d'abscisse 0,5 est sur la droite et sur $\mathscr{C}_h$.

c. Une nuance initiale codée par un réel inférieur à 0,5 est assombrie par la fonction h et si la nuance initiale est codée par un réel supérieur à 0,5, elle est éclaircie par la fonction de retouche h.

5. On a $|u(0,14) - 0,14| \simeq |-0,087|$.
Or, $|-0,087| = 0,087 > 0,05$. Par conséquent une nuance codée 0,14 retouchée par la fonction u sera perceptible visuellement.

Exercice 2

1. Le point M est un point du segment $[AB]$ et $AB = 5$. On en déduit que l'ensemble de définition de f est $[0\ ;\ 5]$.

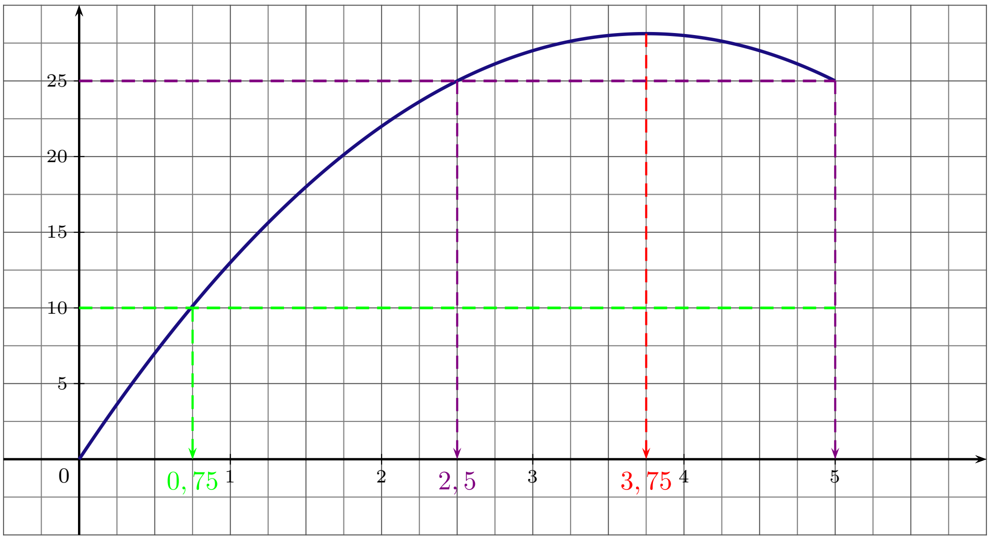
2. a. L'aire est maximale est lorsque $AM = 3,75$.

b. L'aire de la partie non hachurée est inférieure à 10 sur l'intervalle $[0\ ;\ 0,75[$.

c. L'aire du rectangle est $5 \times 10 = 50$. On en déduit que l'aire de la partie hachurée est égale à l'aire de la partie non hachurée lorsque l'aire de la partie hachurée vaut 25.
On obtient cette aire pour deux positions du point M sur $[AB]$: lorsque $AM = 2,5$ (le point M se situe au milieu de $[AB]$ et lorsque $AM = 5$ (dans ce cas, le point M se trouve sur le point B).

d. Tableau de variations de la fonction f :

x	0		3,75		5
$f(x)$	0	$\nearrow$	28	$\searrow$	25



3. La surface hachurée est constituée de deux rectangles : $MNJB$ et $PNID$.

Aire$(MNJB) = MN \times MB = x \times (5 - x)$ et Aire$(PNID) = PN \times NI = x \times (10 - x)$.

Ainsi, l'aire de la partie hachurée est donnée par : $f(x) = x(5-x) + x(10-x) = 5x - x^2 + 10x - x^2 = -2x^2 + 15x$.

4. Le point A semble effectivement être sur la courbe.
Pour en être certain, il faut calculer l'image de 0,75 par f.

$f(0,75) = 15 \times 0,75 - 2 \times 0,75^2 = 10,125 \neq 10$.

On en déduit que le point A n'est pas sur la courbe.
Il se situe un peu au dessus.

Explications

Un point $M(x\ ;\ y)$ est sur $\mathscr{C}_f$ si et seulement si x est bien dans l'ensemble de définition de f et $y = f(x)$.
0,75 est bien compris entre 0 et 5, donc pour savoir si le point A est sur la courbe, il faut calculer l'image de son abscisse par f.
Si $f(0,75) = 10$, alors A est sur la courbe.
Si $f(0,75) \neq 10$, alors A n'est pas sur la courbe.

5. $f(3,75) = 15 \times 3,75 - 2 \times 3,75^2 = 28,125 > 28$.

On en déduit que l'aire de la partie hachurée peut dépasser 28.

Explications

D'après le graphique, ce n'est pas évident. L'idée est de calculer l'image de 3,75 qui est, je vous le rappelle la valeur de x pour laquelle l'aire est la plus grande. On ne sait jamais ..... si on trouve un nombre plus grand que 28, le problème est réglé...

6. L'affirmation de Nabolos est une nouvelle fois fausse. En effet, la fonction f est strictement décroissante pour $x > 3,75$. Cela signifie que lorsque x est plus grand que 3,75, plus x augmente plus $f(x)$ diminue.