# MATHEMATIQUES
## Les vecteurs (entraînement 2 (corrigé))

## Exercice 1

**1.** Le point $I$ est le milieu de $[AB]$, ainsi, $\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$.

**2.** En utilisant la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$.

**3.** En utilisant la relation de Chasles, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{BE}}_{=2\overrightarrow{BC}} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$.

Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, alors $\boxed{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}}$.

**4.** En utilisant la relation de Chasles, $\overrightarrow{AF} = \underbrace{\overrightarrow{AI}}_{=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}} + \underbrace{\overrightarrow{IF}}_{=\overrightarrow{AD}} = \boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$.

**5.**

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AF} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{aligned}\right\} \text{ Ainsi, } \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}}_{=\overrightarrow{AE}}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}}.$$

L'égalité $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ prouve que le point $F$ est le milieu de $[AE]$.

**$F$ est le milieu de $[AE]$**

Autre méthode pour prouver que $F$ est le milieu de $[AE]$ :
Dans le triangle $ABE$, $I$ est le milieu de $[AB]$ et $(IF)$ est parallèle à $(BC)$, d'après le théorème de la droite des milieux, $F$ est le milieu de $[AE]$.

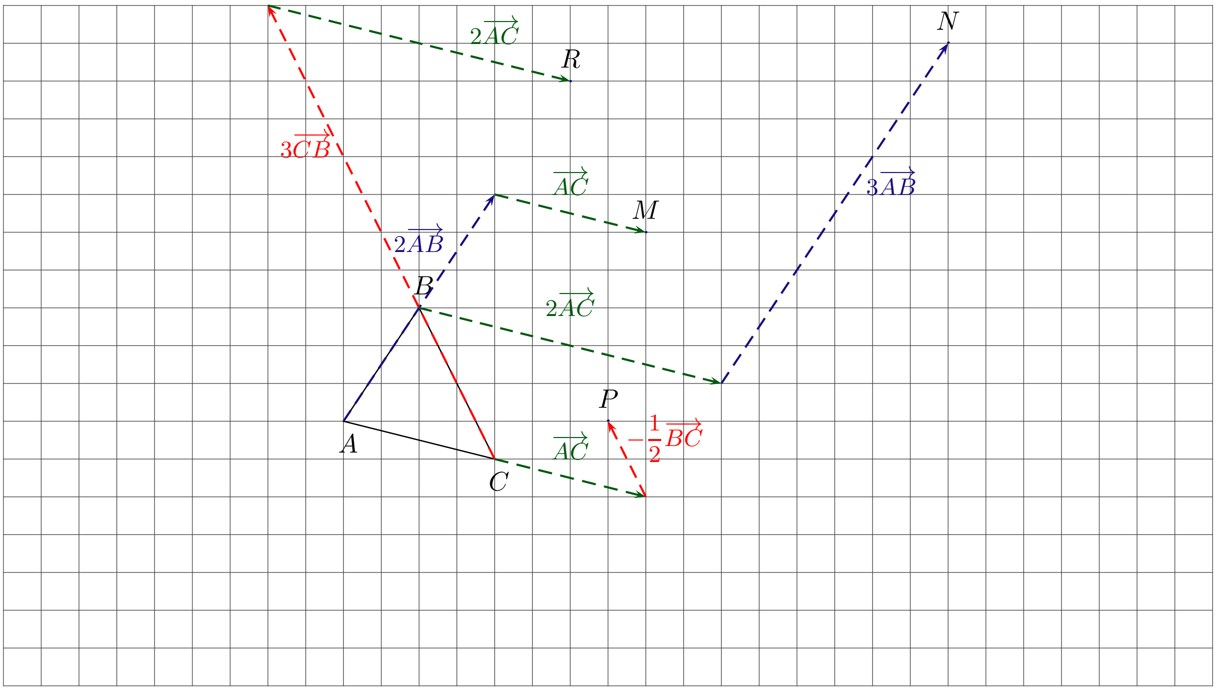
**6.**
- Les coordonnées du point $B$ sont : $(1\ ;\ 0)$.
- Les coordonnées du point $C$ sont : $(1\ ;\ 1)$.
En effet, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- Les coordonnées du point $F$ sont : $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$.
En effet, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- Les coordonnées du point $E$ sont : $(1\ ;\ 2)$.
En effet, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$.

**Coordonnées dans un repère**

Dire que le point $M$ a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(A; B, D)$ signifie que :

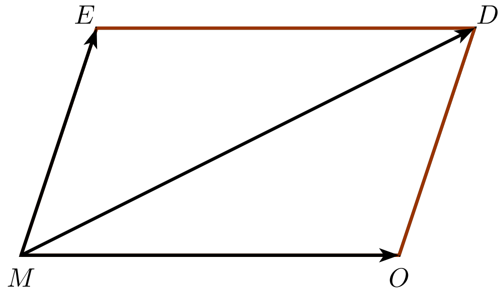
$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$$

# Exercice 2




# Exercice 3

**1.** Un petit schéma :

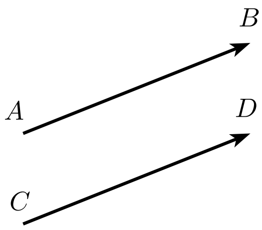



**Remarque**

C'est la règle du parallélogramme (somme de deux vecteurs ayant la même origine : ici le point $M$).

L'affirmation est vraie.

**2.** Un petit schéma :




Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, donc $ABDC$ est un parallélogramme. Ainsi, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\text{BD}}$.

L'affirmation est vraie.

**3.** L'affirmation est vraie. Les deux vecteurs ayant la même origine et étant égaux, ils ont la même extrémité.

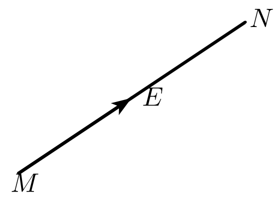
**4.** Si $\vec{u} = \vec{v}$ alors il existe un réel $k$ tel que $\vec{u} = k \times \vec{v}$. C'est $k = 1$.
Donc les vecteurs sont bien colinéaires.

**Réciproque**

Attention, la réciproque est fausse. En effet si deux vecteurs sont colinéaires ils ne sont pas forcément égaux.

**5.** Un petit dessin pour voir.
Les vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{NM}$ ne sont pas de même sens.

L'affirmation est fausse.




**6.** Question plus difficile.

- Commençons d'abord par exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction des mêmes vecteurs, c'est-à-dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ :

$$\vec{u} = 4\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\vec{v} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AB} - \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}.$$

- Essayons d'exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\vec{v}$.

$$\vec{u} = 4\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = -2\underbrace{\left(-2\overrightarrow{AB} - \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}\right)}_{=\vec{v}} = -2\vec{v}.$$

Par conséquent, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien colinéaires.
L'affirmation est vraie.

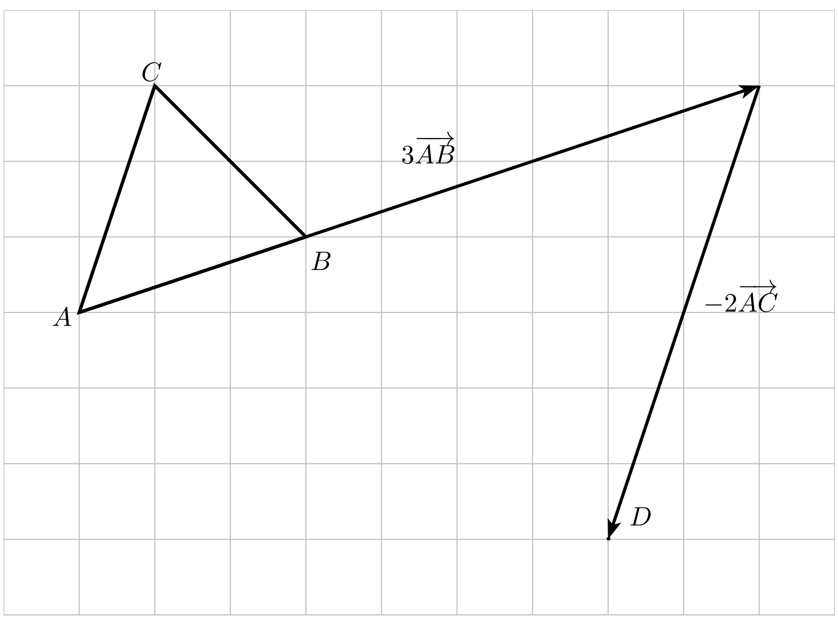
**Autre méthode**

Dans le repère $(A; B, C)$ le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\left(4 ; \frac{3}{4}\right)$ et le vecteur $\vec{v}$ : $\left(-2 ; -\frac{3}{8}\right)$.

Les produits en croix : $4 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{4} \times (-2) = -\frac{3}{2}$ sont bien égaux, ce qui prouve que les coordonnées sont proportionnelles et donc que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

# Exercice 4

**1.** Figure soignée.



**2.** **a.** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

**b.** En utilisant l'égalité $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{BD} & = & \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \\ & = & -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \\ & = & 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \end{array}$$

**3.** On essaie d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{BC}$ en fonction de vecteur $\overrightarrow{BD}$ (ou le contraire).

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \end{array}\right\} \text{ Ainsi, } \overrightarrow{BD} = -2(\underbrace{-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}_{=\overrightarrow{BC}}) = \boxed{-2\overrightarrow{BC}}.$$

**Explications**

L'idée est de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ e
$\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires. Ecrivez les deux égalit
obtenues l'une en dessous de l'autre. Cela per
met de mieux voir les choses.

L'égalité $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BC}$ prouve que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et donc que les points $B$, $C$ et $D$ sont alignés.