MATHEMATIQUES
Les vecteurs (entraînement 4 (corrigé))

Exercice 1

Conseils

Pour simplifier des égalités vectorielles, on va utiliser la relation de Chasles. L'idée est qu'en s'aidant de la figure on remplace un (ou des) vecteur(s) par un (ou des) vecteur égal (égaux) afin de pouvoir utiliser la relation de Chasles.
Je rappelle la relation de Chasles : pour tous points A, B et C du plan,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

1. Egalités complétées.

a. $\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}}_{\text{Relation de Chasles}}=\overrightarrow{AE}$

b. $\underbrace{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}}_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}}=\overrightarrow{AF}$

c. $\underbrace{\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{DG}}_{\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BE}}=\overrightarrow{FE}$

d. $\underbrace{\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{CB}}_{\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}}=\overrightarrow{FD}$

2. Simplification des sommes.

a. $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}=\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}}_{\text{Relation de Chasles}}=\overrightarrow{AE}$.

b. $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{FC}=\underbrace{\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CF}}_{\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FH}}=\overrightarrow{EH}$.

c. $-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}_{\underbrace{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}}}=\overrightarrow{AD}$.

d. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}=\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}}_{\text{Relation de Chasles}}=\overrightarrow{AG}$.

Exercice 2

1. $\underbrace{\overrightarrow{ER}+\overrightarrow{RE}}_{\text{Relation de Chasles}}=\overrightarrow{EE}=\vec{0}$.

2. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$.

3. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$.

4. $\overrightarrow{RT}-\overrightarrow{RU}+\overrightarrow{UT}=\overrightarrow{RT}+\overrightarrow{UR}+\overrightarrow{UT}=\underbrace{\overrightarrow{UR}+\overrightarrow{RT}}_{\text{Relation de Chasles}}+\overrightarrow{UT}=2\overrightarrow{UT}$.

Exercice 3

1. $5 \times (-2,4) - (-4) \times 3 = -12 + 12 = 0.$
On en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

On cherche le réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, c'est-à-dire le réel k qui vérifie $3 = 5 \times k$ et $-2,4 = -4 \times k$.
On obtient $k = 0,6$.
Ainsi, $\vec{v} = 0,6\vec{u}$.

Vecteurs égaux
Les vecteurs $\vec{v}$ et $k\vec{u}$ sont égaux. Ils ont donc les mêmes coordonnées. C'est ce que l'on traduit avec les deux égalités contenant k.

2. Les deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si : $3 \times (-3) - 2 \times (x+4) = 0$.

$$\begin{aligned} 3 \times (-3) - 2 \times (x+4) &= 0 \quad \text{C'est une équation du premier degré qui ne devrait pas poser de problème !} \\ -9 - 2x - 8 &= 0 \\ -2x &= 17 \\ x &= -8,5 \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} -8,5+4 \\ -3 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -4,5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Comme précédemment, on cherche le réel k tel que $-4,5 = 3 \times k$ et $-3 = 2 \times k$.
On trouve $k = -1,5$.

Ainsi, $\vec{v} = -1,5\vec{u}$.

3. $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \\ -1 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) \\ -\frac{2}{3} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\frac{2}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right) \times \frac{1}{3} = -\frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 0.$
Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.

Exercice 4

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.
$14 \times 4 - (-8) \times (-7) = 0.$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.

La méthode
Pour montrer l'alignement des points, on regarde si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Remarquez que ces deux vecteurs ont un point en commun (le point A).

2. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.
On remarque que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$. Pour les mêmes raisons qu'avant, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires. Donc, les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Exercice 5

1.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AQ} &= 3\overrightarrow{MN} - 2\overrightarrow{NA}\\
\overrightarrow{AQ} &= 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) + 2\overrightarrow{AN}\\
\overrightarrow{AQ} &= 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{AN}\\
\overrightarrow{AQ} &= 3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{AN}
\end{aligned}$$

Le principe

On veut au final du vecteur $\overrightarrow{AM}$ et du vecteur $\overrightarrow{AN}$. On "casse" le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$ avec la relation de Chasles. Il n'y a plus qu'à réduire et le tour est joué.

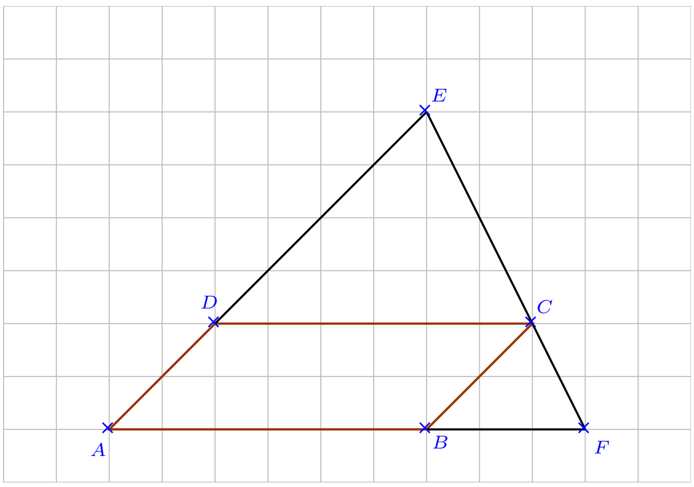
2.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} && \text{C'est la relation de Chasles.}\\
\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} && \text{Comme I est le milieu de } [BC],\ \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\
\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) && \text{C'est la relation de Chasles. Encore.}\\
\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
\overrightarrow{AI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Ce que je conseille

Faites une petite figure à main levée pour visualiser le truc ...

3. a. Voici la figure :



b.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EA} + \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}\\
\overrightarrow{EC} &= -3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{BC}}_{=\overrightarrow{AD}}\\
\overrightarrow{EC} &= -3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\\
\overrightarrow{EC} &= -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

Le principe

Pourquoi avoir "cassé" avec le point A au départ ? Parcequ'on fait apparaître $\overrightarrow{EA}$ qu'on a en fonction de $\overrightarrow{AD}$ par l'énoncé et $\overrightarrow{AC}$ qu'on pourra aussi obtenir en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CF} &= \underbrace{\overrightarrow{CB}}_{=-\overrightarrow{AD}} + \underbrace{\overrightarrow{BF}}_{=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}\\
\overrightarrow{CF} &= -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\overrightarrow{EC} &= -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\\
\overrightarrow{CF} &= -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}\right\} \quad \text{On en déduit } \overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{CF}$$

c. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires, les points E, C et F sont alignés.