# MATHEMATIQUES
## Les vecteurs (sujet savoir-faire 2 (corrigé))

## Exercice 1

**Colinéarité**

C'est une notion essentielle car grâce à elle, on pourra résoudre des problèmes de géométrie tels que le parallélisme de droites, l'alignement de points, ..... C'est donc un outil très important en géométrie.
Pour montrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on montre qu'il existe un réel $k$ (ou un réel $k'$) tel que $\vec{v} = k \times \vec{u}$ (ou $\vec{u} = k' \times \vec{v}$).
Si on a les coordonnées des vecteurs dans un repère, ces égalités traduisent le fait que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles. Autrement dit, on peut regarder si le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul.

**1.** •

$$\begin{aligned} \vec{u} - 3\vec{v} &= \vec{v} \\ \vec{u} &= 3\vec{v} + \vec{v} \\ \vec{u} &= 4\vec{v} \end{aligned}$$

**Explication**

On écrit le vecteur $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\vec{v}$ (ou l'inverse).

On obtient une relation du type $\vec{u} = k \times \vec{v}$ avec $k = 4$. Ainsi, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

• Des égalités $\vec{u} = 10\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = -2\overrightarrow{AB}$, on déduit $\vec{u} = -5\vec{v}$.

**Explication**

$\vec{u} = 10\overrightarrow{AB} = -5 \times (\underbrace{-2\overrightarrow{AB}}_{\vec{v}}) = -5\vec{v}$.

Par conséquent les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

• D'après les coordonnées des vecteurs, on voit que $\vec{u} = -2 \times \vec{v}$.

**Autrement**

Si vous n'arrivez pas à le voir (c'est dommage, mais bon...), on peut toujours calculer la différence des produits en croix :
$4 \times (-3) - (-6) \times 2 = -12 + 12 = 0$.
Cette différence est nulle donc ...

**2.** L'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ s'écrit $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$.
Cette dernière égalité prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

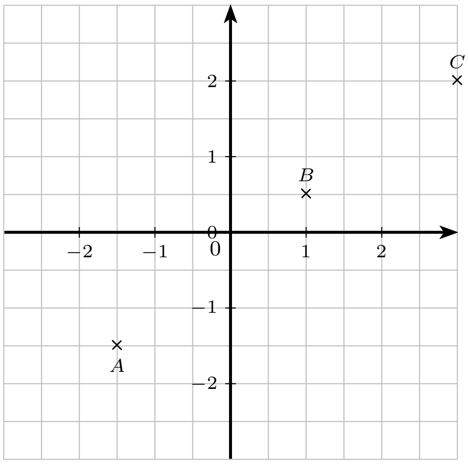
**Remarque**

Ainsi, on prouve que les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés. Vous pouvez faire une figure si vous voulez !

## Exercice 2

**Et pourtant !**

On a l'impression que les points sont alignés.




- On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ :
$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-1,5) \\ 0,5-(-1,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2 \end{pmatrix}$

- On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ :
$\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-1,5) \\ 2-(-1,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$

- On regarde si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est :

$$2,5 \times 3,5 - 2 \times 4,5 = -0,25 \neq 0$$

**Explication**

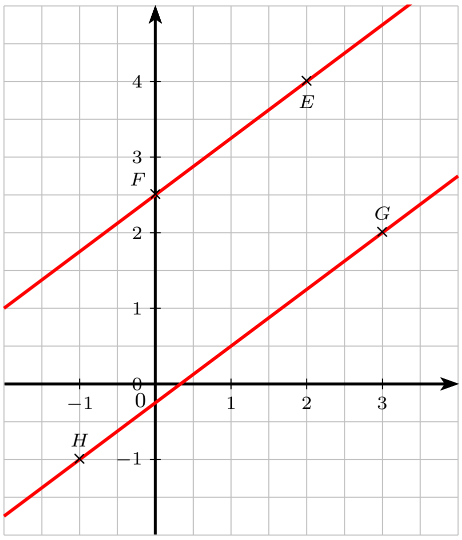
Pour tester la colinéarité, on calcule le déterminant des vecteurs. Pensez-y quand on a les coordonnées !

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (ils n'ont pas la même direction). On en déduit que les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.

## Exercice 3

**On confirme**

On a l'impression que les droites sont parallèles.




- On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$ :
$\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2,5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$

- On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GH}$ :
$\begin{pmatrix} x_H - x_G \\ y_H - y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

On constate que $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{EF}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires et donc les droites $(EF)$ et $(GH)$ sont parallèles.