MATHEMATIQUES
Primitives et équations différentielles : les démonstrations

1. Soit f une fonction continue et sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
f admet une infinité de primitives F_k sur I de la forme :

$$F_k : x \longmapsto F(x) + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

- On montre que les fonctions F_k sont bien des primitives de f sur I :
  Pour tout $x \in$ I et $k \in \mathbb{R}$, $F_k'(x) = F'(x) = f(x)$. F_k est bien une primitive de f sur I :
- On montre ensuite que toute primitive de f sur I est forcément de la forme $x \longmapsto F(x) + k$ $(k \in \mathbb{R})$:
  Soit G une primitive de f sur I. Ainsi, $G' = f = F'$ et donc $G' - F' = 0$.
  $G - F$ est alors une fonction constante sur I et donc, pour tout $x \in$ I, il existe un réel k tel que :

$$G(x) - F(x) = k \iff G(x) = F(x) + k$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = k\mathrm{e}^{ax}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- **Existence :**
  Soit $k \in \mathbb{R}$.
  Soit f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = k\mathrm{e}^{ax}$.

  f_k est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) = a \times k\mathrm{e}^{ax}$.
  Donc f_k est bien une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

- **Unicité de la forme :**
  Démontrons que les fonctions f_k sont les seules solutions de l'équation différentielle $y' = ay$.
  Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
  Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = \dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^{ax}}$.
  La fonction Φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{g'(x)\mathrm{e}^{ax} - a\mathrm{e}^{ax}g(x)}{\left(\mathrm{e}^{ax}\right)^2} \\ &= \frac{ag(x)\mathrm{e}^{ax} - ag(x)\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{2ax}} \quad \text{car } g'(x) = ag(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Ainsi la fonction Φ est constante sur $\mathbb{R}$.
  C'est à dire, qu'il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = k = \dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^{ax}}$.
  D'où $g(x) = k\mathrm{e}^{ax}$.
  Donc toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme $f_k(x) = k\mathrm{e}^{ax}$.