MATHEMATIQUES
Combinatoire et dénombrement : les démonstrations

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Deux méthodes, l'une ensembliste, l'autre algébrique :

1. Soit E un ensemble fini à $n \geqslant 2$ éléments et a un élément de E.
Les ensembles à p éléments de E se partagent en deux parties :
— celles ne contenant pas a, il y en a $\binom{n-1}{p}$;
— celles contenant a, il y en a $\binom{n-1}{p-1}$.
Donc, il y a $\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ ensembles de p éléments choisis parmi n , d'où le résultat.

2. On effectue le calcul :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \\ &= \\ &= \\ &= \binom{n}{p}.\end{aligned}$$

Remarque :

On démontre ainsi que pour tout n et p, le nombre $\binom{n}{p}$ est un entier par récurrence en posant pour propriété $\mathcal{P}(n)$ « pour tout $p \in [[0;n]]$, $\binom{n}{p}$ est un entier ».

2. Pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

- Une partie de E peut posséder 0 ou 1 ou 2 .... ou n éléments. Pour un nombre entier k tel que $k \leqslant n$, le nombre de parties à k éléments est $\binom{n}{k}$. Le nombre total de partie de E est ainsi :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

- Notons x_1, x_2, ... , x_n les éléments de E.

On constitue une partie de E en spécifiant, pour chacun des éléments de E, s'il appartient ou non à cette partie. pour l'élément x_1, on a deux choix (le prendre ou pas), de même que pour x_2 et ainsi de suite jusqu'à x_n. Il y a donc 2^n parties différentes de E en les constituant de la sorte.

- Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$