MATHEMATIQUES
Suites. Limites de suites : les démonstrations

1. Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$.

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.
Soit A un réel quelqconque et grand.
Comme la suite n'est pas majorée, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > A$.
Or la suite (u_n) est croissante, donc pour tout $n \geqslant p$, on a $u_n > A$.
Ainsi, pour tout A un réel quelqconque et grand, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant p$, on a $u_n > A$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. Démontrer la propriété suivante :
Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$:

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Il existe donc un rang n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $u_n > \mathrm{A}$.
Or, il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$ donc , pour tout $n > N = max(n_0, n_1)$, $\mathrm{A} < u_n \leqslant v_n$.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

3. En utilisant le théorème suivant (qu'on ne demande pas de démontrer) :

Théorème

Soit un nombre réel a strictement positif. Pour tout entier naturel n : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Démontrer que si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

On pose $q = 1 + a$ avec $a > 0$. À l'aide du théorème précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.
Or, pour tout $a > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ car , pour tout A réel, il existe un rang $n_0 > \dfrac{\mathrm{A} - 1}{a}$ tel que, pour tout $n > n_0$, $1 + na > \mathrm{A}$.
Donc par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+a)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

4. $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

- $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
  On a $\mathrm{e} > 2 > 1$.
  Or $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.
  Donc, par le théorème des comparaison, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$.
  Ansi $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

- $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
  On pose $y = -x$.
  Donc $\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$.
  Ainsi $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^y}$.
  Or, avec la première assertion, on a $\lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^y = +\infty$.
  Donc, par quotient, $\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^y} = 0$.
  C'est pourquoi $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.