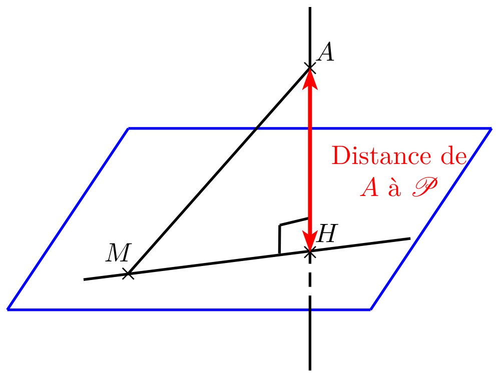
MATHEMATIQUES
Orthogonalité et distances dans l'espace : les démonstrations

Soient A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ est le point H qui appartient au plan $\mathcal{P}$ et qui est le plus proche du point A.



Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
Soit M un point du plan $\mathcal{P}$ distinct du point H.

On va procéder en deux temps.

- On suppose que le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.
  Ainsi les points A, H et M sont distincts et forment un plan.
  On se place dans le plan (AMH).
  Comme le point M est distinct du point H, d'une part le triangle AMH est rectangle en H et donc AM est l'hypoténuse et d'autre part $MH > 0$.
  Donc, d'après le théorème de Pythagore, $AM > AH$.
  Ainsi le point H est bien le point du plan $\mathcal{P}$ le plus proche du point A.

- On suppose que le point A appartient au plan $\mathcal{P}$.
  Il existe une unique droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$ passant par le point A.
  Le point d'intersection entre cette droite et le plan $\mathcal{P}$ est le point H, le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
  Or le point A appartient au plan $\mathcal{P}$.
  Donc le point A et son projeté orthogonal sont confondus.
  Ainsi $AH = 0$.
  Or le point M est distinct du point H.
  Donc $AM > AH$.
  Ainsi le point H est bien le point du plan $\mathcal{P}$ le plus proche du point A.

Donc le point H est bien le point du plan $\mathcal{P}$ le plus proche du point A.