MATHEMATIQUES
Limites de fonctions : les démonstrations

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

La fonction exponentielle croit en $+\infty$ bien plus rapidement que n'importante quelle fonction puissance.

1. On va tout d'abord démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

- **Méthode 1 :**
Soit $x > 0$:

$$\mathrm{e}^x > x \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > \frac{x}{2} \iff \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 > \left(\frac{x}{2}\right)^2 \iff \mathrm{e}^x > \frac{x^2}{4} \iff \frac{\mathrm{e}^x}{x} > \frac{x}{4}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

- **Méthode 2 :**
On montre dans un premier temps que $\mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

On pose $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \mathrm{e}^x - x$.

La fonction f' est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

Or, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1$.
Donc, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$. On en déduit le tableau de variations de f' :

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	0	$+$	
$f'(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $f'(x) \geqslant 0$.

C'est pourquoi la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Or $f(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1 > 0$.
Donc pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $f(x) \geqslant 0$.
Ainsi pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $\mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$.

C'est pourquoi pour tout $x > 0$, on a $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \geqslant \dfrac{x}{2}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$.

Donc, d'après le théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrons à présent que pour tout $n \geqslant 2$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.

Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{n} \times \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n &= \left(\frac{1 \times \mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{n \times \frac{x}{n}}\right)^n \\
&= \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n \\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n} \times n}}{x^n} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{x^n}
\end{aligned}$$

.

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$.

On pose $y = \dfrac{x}{n}$.

On a alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{n} = +\infty$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \\
&= \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{\mathrm{e}^y}{y}\right)^n
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^y}{y} = +\infty$, avec ce qui précède.

Donc $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\mathrm{e}^y}{y^n} = +\infty$.

On pose $t = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\mathrm{e}^y}{y^n}$.

Donc $\lim\limits_{y \to +\infty} t = \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\mathrm{e}^y}{y^n} = +\infty$

Or $\lim\limits_{t \to +\infty} t^n = +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{t \to +\infty} t^n = \lim\limits_{y \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{\mathrm{e}^y}{y^n}\right)^n = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.