

MATHEMATIQUES

Dérivation, convexité et continuité : les démonstrations

Si une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I est convexe sur I alors toutes les tangentes à \mathcal{C}_f sont en dessous de \mathcal{C}_f .

Soit $a \in I$.

Soit \mathcal{T}_a la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a .

Ainsi :

$$\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

On pose $d(x) = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a))$.

La fonction d est définie, continue et dérivable sur I , car la fonction f est définie, continue et dérivable sur I .

Soit $x \in I$.

$$d'(x) = f'(x) - f'(a).$$

Comme la fonction f' est dérivable sur l'intervalle I , la fonction d' l'est aussi.

$$\text{Ainsi } d''(x) = f''(x).$$

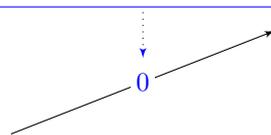
La fonction f est convexe sur I , donc f'' est positive sur l'intervalle I .

Comme $d''(x) = f''(x)$, on a que la fonction d'' est positive sur l'intervalle I .

Ainsi la fonction d' est croissante sur I .

$$\text{Or } d'(a) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

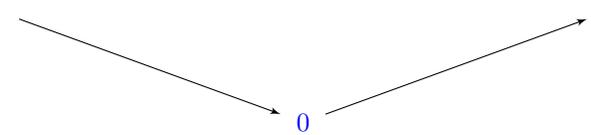
x	a
$d'(x)$	

On en déduit alors que :

- Si $x \geq a$, alors $d'(x) \geq 0$ et donc la fonction d est croissante sur $[a; +\infty[$.
- Si $x \leq a$, alors $d'(x) \leq 0$ et donc la fonction d est décroissante sur $] -\infty; a]$.

$$\text{Or } d(a) = f(a) - (f'(a)(a - a) + f(a)) = 0.$$

Cela permet d'obtenir le tableau suivant :

x	a
$d'(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$d(x)$	

Donc $d(x) \geq 0$.

$$\text{D'où } f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a)) \geq 0.$$

$$\text{C'est pourquoi } f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a).$$

Ainsi la courbe \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{T}_a .

On vient de démontrer pour toutes les valeurs de $a \in I$, les tangentes \mathcal{T}_a sont sous la courbe \mathcal{C}_f .

Donc la courbe \mathcal{C}_f est au dessus de toutes ses tangentes sur l'intervalle I .