MATHEMATIQUES
Fonction logarithme népérien : les démonstrations

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur $]0;+\infty[$.
Pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}>0$.

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{\ln(x)}=x$.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\ln'(x)\times\mathrm{e}^{\ln(x)}=\ln'(x)\times x$.

Or pour tout réel $x>0$, $f(x)=x$ d'où $f'(x)=1$

Ainsi pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)\times x=1$ donc $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0^-$

Soit $x>0$:
En posant $X=\dfrac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} X=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X}\ln\left(\dfrac{1}{X}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}-\dfrac{\ln(X)}{X}=0^-$.