MATHEMATIQUES
Rappels sur les suites

1 Définition

Définition

Une suite numérique u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u \ : \ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \quad \text{ou} \quad u_n \end{aligned}$$

On note cette suite (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement u.
u_n est un terme de la suite (u_n) et n est l'indice du terme u_n.

Exemple : Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u \ : \ n \longmapsto u(n) = u_n = n^2$.
On a donc $u_0 = u(0) = 0^2 = 0$; $u_1 = u(1) = 1^2 = 1$; $u_2 = u(2) = 2^2 = 4$.

2 Mode de génération d'une suite numérique

Définition

On peut exprimer de manière explicite une suite (u_n) par l'expression du terme général u_n en fonction de n, c'est-à-dire par une relation du type $u_n = f(n)$, où f est la fonction associée à la suite (u_n).

Exemple : $u_n = n^2 + 2n - 5$, $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 + 2x - 5$.

Remarque : Dans ce cas, on peut calculer directement n'importe quel terme d'une suite définie de manière explicite.

Définition

Une suite est définie par récurrence quand elle est définie par la donnée de :
- son premier terme ;
- une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ qui permet de calculer, à partir de chaque terme, le terme suivant. f est la fonction associée à la suite (u_n). Cette relation est appelée relation de récurrence.

Exemple : (v_n) est la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 3v_n - 1$.

Remarque : On ne peut pas calculer le terme v_5 directement, mais seulement à partir de son prédécesseur v_4.

2.1 Nature d'une suite

Définition

Une suite (u_n) est dite arithmétique lorsqu'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{ou} \quad u_n = u_0 + nr$$

Le nombre r est appelé la raison de la suite arithmétique.

Méthode

Pour prouver qu'une suite (u_n) est arithmétique, on montre que, pour tout entier naturel n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante, c'est-à-dire indépendante de n.

Définition

Une suite (v_n) est dite géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = v_n \times q \quad \text{ou} \quad v_n = v_0 \times q^n$$

Le nombre q est appelé la raison de la suite géométrique.

Méthode

Pour prouver qu'une suite (v_n) est géométrique, on montre que, pour tout entier naturel n, le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant, c'est-à-dire indépendant de n.

2.2 Somme des termes d'une suite

Propriété

Soit n un entier naturel non nul. Alors la somme des n premiers termes non nuls est :

$$1+2+3+\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Avec cette formule, on en déduit la somme des premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) :

$$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n=(n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}$$

Exemple : Déterminer la valeur de n telle que $1+2+3+\ldots+n=300$.

$1+2+3+\ldots+n=300 \iff \dfrac{n(n+1)}{2}=300 \iff n^2+n-600=0.$
$\Delta=b^2 4ac=1^2-4\times 1\times(-600)=2401>0.$
L'équation admet deux solutions $n_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-49}{2}=-25<0$ et $n_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+49}{2}=24<0.$
On trouve alors $n=24$. $\dfrac{24\times 25}{2}=300.$

Propriété

Soit $q\neq 1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$1+q+q^2+\ldots\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Avec cette formule, on en déduit la somme des premiers termes d'une suite géométrique (v_n) de terme initial v_0 et de raison $q\neq 1$:

$$v_0+v_1+v_2+\ldots\ldots+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple : Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q=0{,}75$ et de terme initial $v_0=60$.

Calculer la somme $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{12}v_n$. *(On arrondira le résultat au millième près)*

$S=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{12}=v_0\times\dfrac{1-q^{12+1}}{1-q}=60\times 4\times(1-0{,}75^{13})\simeq 234{,}298.$

2.3 Variations d'une suite

Définition

- On dit qu'une suite (u_n) est croissante à partir du rang $n_0\in\mathbb{N}$ si pour tout entier naturel $n\geqslant n_0$:

$$u_n\leqslant u_{n+1}$$

- On dit qu'une suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n_0\in\mathbb{N}$ si pour tout entier naturel $n\geqslant n_0$:

$$u_n\geqslant u_{n+1}$$

- On dit qu'une suite (u_n) est monotone à partir du rang $n_0\in\mathbb{N}$ si elle est soit croissante à partir du rang n_0, soit décroissante à partir du rang n_0.
- On dit qu'une suite (u_n) est constante à partir du rang $n_0\in\mathbb{N}$ si pour tout entier naturel $n\geqslant n_0$:

$$u_n=u_{n+1}$$

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on peut :

- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- Si tous les termes de la suite u sont de même signe et non nul, on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 ;
  (utile en présence de fractions ou puissances)
- Si la suite est définie de manière explicite, c'est-à-dire si pour tout entier naturel n, on a $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, on peut étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$;
- Si la suite est définie par récurrence, on utilise un raisonnement par récurrence.

Exemples : Étudier le sens de variation des suites (u_n) et (h_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sqrt{n+2} \qquad \text{et} \qquad h_{n+1} = 0{,}75 h_n + 30 \text{ avec } h_0 = 80$$

1$^{\text{ère}}$méthode :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} \\
&= \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \\
&= \frac{(n+3) - (n+2)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} > 0
\end{aligned}$$

La suite (u_n) est strictement croissante.

2$^{\text{ème}}$méthode :
En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}} = \sqrt{\frac{n+3}{n+2}}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+3}{n+2} > 1$ donc $\sqrt{\dfrac{n+3}{n+2}} > \sqrt{1}$.
La suite (u_n) est strictement croissante.

3$^{\text{ème}}$méthode : Chaque terme de la suite (u_n) est de la forme $u_n = f(n)$ avec $f : x \longmapsto \sqrt{x+2}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
Or, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ car la fonction racine conserve les mêmes variations que la fonction affine $x \longmapsto x+2$ strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+1 > n \Longrightarrow u_{n+1} > u_n$.
La suite (u_n) est strictement croissante.

On commence par calculer quelques termes pour conjecturer le sens de variation de la suite (h_n) : $h_0 = 80$, $h_1 = 0{,}75 \times 80 + 30 = 90$, $h_2 = 0{,}75 \times 90 + 30 = 97{,}5$, etc.

Montrons par récurrence que la suite (h_n) est strictement croissante :

Initialisation : on sait déjà que $h_0 < h_1$;

Hérédité : On suppose qu'il existe un certain $n \in \mathbb{N}$ tel que $h_n < h_{n+1}$, on obtient alors :

$$0,75h_n < 0,75h_{n+1} \iff 0,75h_n + 30 < 0,75h_{n+1} + 30 \iff h_{n+1} < h_{n+2}$$

L'hérédité est démontrée, donc la suite (h_n) est strictement croissante.