Primitives et équations différentielles

www.mathGM.fr

Lycée Louise Michel (Gisors)

Les savoir-faire

110. Montrer qu'une fonction est primitive d'une fonction donnée.
111. Déterminer les primitives d'une fonction donnée.
112. Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay$.
113. Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$.
114. Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$.

Le problème du chapitre

Après la découverte par Becquerel des rayons uraniques, Marie Curie choisit en 1897 comme sujet de thèse l'étude des propriétés de ces rayons.
Elle découvre, aidée de Pierre, d'autres matières radioactives que l'uranium : le polonium et le radium.
Le nombre d'atomes de radium qui se désintègrent en un temps donné est proportionnel à leur nombre à chaque instant, c'est à dire $N'(t) = -aN(t)$, où $N(t)$ est le nombre d'atomes à l'instant t et a une constante positive.
En physique, on montre expérimentalement que les noyaux radioactifs « meurent sans vieillir ». C'est Gamov qui le premier, en 1928, a expliqué ce phénomène à l'aide de la toute nouvelle mécanique quantique.
On admet que l'équation différentielle de désintégration du polonium est $y' = -0,0076y$.
L'objectif est alors d'établir l'expression de la fonction N qui dépend du temps t, en année ; puis de déterminer la demi-vie du polonium. C'est à dire le temps au bout duquel il reste la moitié du nombre d'atomes de polonium qu'il y avait initialement.

Primitives d'une fonction f

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
On appelle primitive de f sur $[a\ ;\ b]$ toute fonction F dérivable sur $[a\ ;\ b]$ telle que pour tout réel $x \in [a\ ;\ b]$:

$$F'(x) = f(x)$$

Primitives d'une fonction f

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
On appelle primitive de f sur $[a\ ;\ b]$ toute fonction F dérivable sur $[a\ ;\ b]$ telle que pour tout réel $x \in [a\ ;\ b]$:

$$F'(x) = f(x)$$

Théorème

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Primitives d'une fonction f

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
On appelle primitive de f sur $[a\ ;\ b]$ toute fonction F dérivable sur $[a\ ;\ b]$ telle que pour tout réel $x \in [a\ ;\ b]$:

$$F'(x) = f(x)$$

Théorème

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème

Soit f une fonction continue et sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
f admet une infinité de primitives F_k sur I de la forme :

$$F_k : x \longmapsto F(x) + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Tableau de primitives (1)

$f(x) =$	$F(x) =$	I $=$
m (constante)		$\mathbb{R}$
x		$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\})$		Si $n \leqslant -2$, $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$.
$\dfrac{1}{x^2}$		$]-\infty\ ;\ 0[$ ou $]0\ ;\ +\infty[$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		$]0\ ;\ +\infty[$

Exemples : Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f.

a. $f(x) = 5x^4$ **b.** $f(x) = 5x - 3$ **c.** $f(x) = x^3 - 2x$ Vidéo

Tableau de primitives (1)

$f(x) =$	$F(x) =$	**I** $=$
m (constante)	$mx + k$	$\mathbb{R}$
x		$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\})$		Si $n \leqslant -2$, $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$.
$\dfrac{1}{x^2}$		$]-\infty\ ;\ 0[$ ou $]0\ ;\ +\infty[$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		$]0\ ;\ +\infty[$

Exemples : Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f.

a. $f(x) = 5x^4$ **b.** $f(x) = 5x - 3$ **c.** $f(x) = x^3 - 2x$ Vidéo

Tableau de primitives (1)

$f(x) =$	$F(x) =$	$\mathbf{I} =$
m (constante)	$mx + k$	$\mathbb{R}$
x	$\dfrac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\})$		Si $n \leqslant -2$, $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$.
$\dfrac{1}{x^2}$		$]-\infty\ ;\ 0[$ ou $]0\ ;\ +\infty[$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		$]0\ ;\ +\infty[$

Exemples : Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f.

a. $f(x) = 5x^4$ **b.** $f(x) = 5x - 3$ **c.** $f(x) = x^3 - 2x$ Vidéo

Tableau de primitives (1)

$f(x) =$	$F(x) =$	**I** $=$
m (constante)	$mx + k$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	Si $n \leqslant -2$, $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$.
$\frac{1}{x^2}$		$]-\infty\ ;\ 0[$ ou $]0\ ;\ +\infty[$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$		$]0\ ;\ +\infty[$

Exemples : Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f.

a. $f(x) = 5x^4$ **b.** $f(x) = 5x - 3$ **c.** $f(x) = x^3 - 2x$ Vidéo

Tableau de primitives (1)

$\boldsymbol{f(x)} =$	$\boldsymbol{F(x)} =$	**I** $=$
m (constante)	$mx + k$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	Si $n \leqslant -2$, $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$.
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	$]-\infty\ ;\ 0[$ ou $]0\ ;\ +\infty[$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$		$]0\ ;\ +\infty[$

Exemples : Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f.

a. $f(x) = 5x^4$ **b.** $f(x) = 5x - 3$ **c.** $f(x) = x^3 - 2x$ Vidéo

Tableau de primitives (1)

$f(x) =$	$F(x) =$	**I** $=$
m (constante)	$mx + k$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}\,x^2 + k$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	Si $n \leqslant -2$, $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$.
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	$]-\infty\ ;\ 0[$ ou $]0\ ;\ +\infty[$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + k$	$]0\ ;\ +\infty[$

Exemples : Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f.

a. $f(x) = 5x^4$ **b.** $f(x) = 5x - 3$ **c.** $f(x) = x^3 - 2x$ Vidéo

Tableau de primitives (2)

$\cos(x)$		$\mathbb{R}$
$\sin(x)$		$\mathbb{R}$
e^x		$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$		$]0\ ;\ +\infty[$

Exemples :

a. $f(x) = -\dfrac{2}{x}$ **b.** $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ **c.** $f(x) = 4e^x$ Vidéo

Tableau de primitives (2)

$\cos(x)$	$\sin(x) + k$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$		$\mathbb{R}$
e^x		$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$		$]0\ ;\ +\infty[$

Exemples :

a. $f(x) = -\dfrac{2}{x}$ **b.** $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ **c.** $f(x) = 4e^x$ Vidéo

Tableau de primitives (2)

$\cos(x)$	$\sin(x)+k$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+k$	$\mathbb{R}$
e^x		$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$		$]0\ ;\ +\infty[$

Exemples :

a. $f(x) = -\dfrac{2}{x}$ **b.** $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ **c.** $f(x) = 4\mathrm{e}^x$ Vidéo

Tableau de primitives (2)

$\cos(x)$	$\sin(x)+k$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+k$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x+k	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$		$]0\ ;\ +\infty[$

Exemples :

a. $f(x) = -\dfrac{2}{x}$ **b.** $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ **c.** $f(x) = 4\mathrm{e}^x$ Vidéo

Tableau de primitives (2)

$\cos(x)$	$\sin(x) + k$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + k$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathrm{e}^x + k$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x) + k$	$]0\ ;\ +\infty[$

Exemples :

a. $f(x) = -\dfrac{2}{x}$ **b.** $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ **c.** $f(x) = 4\mathrm{e}^x$ $\boxed{\text{Vidéo}}$

Fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

$f(x) =$	$F(x) =$	Conditions
$u'\ u^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$		Si $n \leqslant -2$, $u(x) \neq 0$.
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$		$u(x) > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u^2}$		$u(x) \neq 0$ sur I
$u'\mathrm{e}^u$		Aucune
$\dfrac{u'}{u}$		$u(x) > 0$ sur I

Propriété

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout x de I, $u(x) \in J$, alors la fonction $(v' \circ u) \times u'$ admet pour

Fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

$f(x) =$	$F(x) =$	Conditions
$u'\ u^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$	Si $n \leqslant -2$, $u(x) \neq 0$.
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$		$u(x) > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u^2}$		$u(x) \neq 0$ sur I
$u'\mathrm{e}^u$		Aucune
$\dfrac{u'}{u}$		$u(x) > 0$ sur I

Propriété

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout x de I, $u(x) \in J$, alors la fonction $(v' \circ u) \times u'$ admet pour

Fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

$f(x) =$	$F(x) =$	Conditions
$u'\ u^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$	Si $n \leqslant -2$, $u(x) \neq 0$.
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + k$	$u(x) > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u^2}$		$u(x) \neq 0$ sur I
$u'\mathrm{e}^u$		Aucune
$\dfrac{u'}{u}$		$u(x) > 0$ sur I

Propriété

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout x de I, $u(x) \in J$, alors la fonction $(v' \circ u) \times u'$ admet pour

Fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

$f(x) =$	$F(x) =$	**Conditions**
$u'\ u^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$	Si $n \leqslant -2$, $u(x) \neq 0$.
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + k$	$u(x) > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u'\mathrm{e}^u$		Aucune
$\dfrac{u'}{u}$		$u(x) > 0$ sur I

Propriété

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout x de I, $u(x) \in J$, alors la fonction $(v' \circ u) \times u'$ admet pour

Fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

$f(x) =$	$F(x) =$	Conditions
$u'\ u^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$	Si $n \leqslant -2$, $u(x) \neq 0$.
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + k$	$u(x) > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + k$	Aucune
$\dfrac{u'}{u}$		$u(x) > 0$ sur I

Propriété

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout x de I, $u(x) \in J$, alors la fonction $(v' \circ u) \times u'$ admet pour

Fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

$f(x) =$	$F(x) =$	**Conditions**
$u'\ u^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$	Si $n \leqslant -2$, $u(x) \neq 0$.
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + k$	$u(x) > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + k$	Aucune
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u) + k$	$u(x) > 0$ sur I

Propriété

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout x de I, $u(x) \in J$, alors la fonction $(v' \circ u) \times u'$ admet pour

Exemples

Exemples

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f.

a. $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ **b.** $f(x) = \mathrm{e}^{4x+1}$ Vidéo

Primitives et conditions initiales

Primitive sous condition initiale

Soit f une fonction continue et définie sur un intervalle I. Pour tout réel x_0 de I et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f vérifiant la condition initiale :

$$G(x_0) = y_0$$

Primitives et conditions initiales

Primitive sous condition initiale

Soit f une fonction continue et définie sur un intervalle I. Pour tout réel x_0 de I et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f vérifiant la condition initiale :

$$G(x_0) = y_0$$

Exemples

Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 2\mathrm{e}^x + \dfrac{3}{x} - 5x$.

Déterminer la primitive de f qui prend la valeur $2\mathrm{e}$ en 1. Vidéo

Définition

Exemple :
Prouver que la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \dfrac{1}{x}$. Vidéo

Equations différentielles

Définition

- Une équation différentielle est une égalité liant une fonction inconnue y de la variable x, ses dérivées successives y', y'', ... et éventuellement d'autres fonctions (constantes, f,....).

Exemple :
Prouver que la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \dfrac{1}{x}$. Vidéo

Définition

- Une équation différentielle est une égalité liant une fonction inconnue y de la variable x, ses dérivées successives y', y'', ... et éventuellement d'autres fonctions (constantes, f,....).
- On appelle solution d'une équation différentielle toute fonction dérivable vérifiant l'égalité.

Exemple :
Prouver que la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \dfrac{1}{x}$. Vidéo

Equations différentielles

Définition

- Une équation différentielle est une égalité liant une fonction inconnue y de la variable x, ses dérivées successives y', y'', ... et éventuellement d'autres fonctions (constantes, f,....).
- On appelle solution d'une équation différentielle toute fonction dérivable vérifiant l'égalité.
- Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.

Exemple :
Prouver que la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \dfrac{1}{x}$. Vidéo

Equation différentielle $y' = ay$

Théorème

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions $x \longmapsto Ce^{ax}$, avec C réel.

Remarque :
Pour x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle $y' = ay$ prenant la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire vérifiant la « condition initiale » $f(x_0) = y_0$.

Exemple :
On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.

1. Déterminer la solution générale de cette équation.

2. Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$. Vidéo

Equation différentielle $y' = ay + b$

Théorème

Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a est un réel non nul et b un réel ont pour solutions les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, avec C réel.

Remarque :
Pour x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle $y' = ay$ prenant la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire vérifiant la « condition initiale » $f(x_0) = y_0$.

Exemple :
On considère l'équation différentielle $y' = 3y - 2$.

1. Déterminer la solution particulière constante de cette équation.
2. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation. Vidéo

Equation différentielle $y' = ay + f$

Théorème

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I. Etant donnée une solution particulière y_0 de l'équation différentielle $y' = ay + f$, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} + y_0(x)$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple :
On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est solution de l'équation.

2. En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation.

Vidéo