Chapitre 11

Primitives et équations différentielles

Les savoir-faire

110. Montrer qu'une fonction est primitive d'une fonction donnée.

111. Déterminer les primitives d'une fonction donnée.

112. Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay$.

113. Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$.

114. Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$.

I. Primitive d'une fonction continue

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
On appelle primitive de f sur $[a\ ;\ b]$ toute fonction F dérivable sur $[a\ ;\ b]$ telle que pour tout réel $x \in [a\ ;\ b]$:

$$F'(x) = f(x)$$

Théorème

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème

Soit f une fonction continue et sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
f admet une infinité de primitives F_k sur I de la forme :

$$F_k : x \longmapsto F(x) + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

II. Calculs de primitives

1. Tableau de primitives

$f(x) =$	$F(x) =$	$\mathbf{I} =$
m (constante)	$mx + k$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	Si $n \leqslant -2$, $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$.
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	$]-\infty\ ;\ 0[$ ou $]0\ ;\ +\infty[$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + k$	$]0\ ;\ +\infty[$
$\cos(x)$	$\sin(x) + k$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + k$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathrm{e}^x + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$	$]0\ ;\ +\infty[$

Exemples :
Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f.
a. $f(x) = 5x^4$ **b.** $f(x) = 5x - 3$ **c.** $f(x) = x^3 - 2x$ Vidéo

d. $f(x) = -\frac{2}{x}$ **e.** $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$ **f.** $f(x) = 4\mathrm{e}^x$ Vidéo

2. Fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

$f(x) =$	$F(x) =$	Conditions
$u'\ u^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$	Si $n \leqslant -2$, $u(x) \neq 0$.
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + k$	$u(x) > 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + k$	Aucune
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + k$	$u(x) > 0$ sur I

Propriété

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout x de I, $u(x) \in J$, alors la fonction $(v' \circ u) \times u'$ admet pour primitive sur I la fonction $v \circ u$.

Exemples :
Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f.
a. $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ **b.** $f(x) = \mathrm{e}^{4x+1}$ Vidéo

3. Primitives et conditions initiales

Primitive sous condition initiale

Soit f une fonction continue et définie sur un intervalle I. Pour tout réel x_0 de I et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f vérifiant la condition initiale :

$$G(x_0) = y_0$$

Exemples :
Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 2\mathrm{e}^x + \dfrac{3}{x} - 5x$.
Déterminer la primitive de f qui prend la valeur $2\mathrm{e}$ en 1. Vidéo

III. Equations différentielles

1. Equations différentielles

Définition

- Une équation différentielle est une égalité liant une fonction inconnue y de la variable x, ses dérivées successives y', y'', ... et éventuellement d'autres fonctions (constantes, f,....).
- On appelle solution d'une équation différentielle toute fonction dérivable vérifiant l'égalité.
- Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.

Exemple :
Prouver que la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \dfrac{1}{x}$. Vidéo

2. Equation différentielle $y' = ay$

Théorème

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, avec C réel.

Remarque :
Pour x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle $y' = ay$ prenant la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire vérifiant la « condition initiale » $f(x_0) = y_0$.

Exemple :
On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.
1. Déterminer la solution générale de cette équation.
2. Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$. Vidéo

3. Equation différentielle $y' = ay + b$

Théorème

Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a est un réel non nul et b un réel ont pour solutions les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, avec C réel.

Remarque :
Pour x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle $y' = ay$ prenant la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire vérifiant la « condition initiale » $f(x_0) = y_0$.

Exemple :
On considère l'équation différentielle $y' = 3y - 2$.
1. Déterminer la solution particulière constante de cette équation.
2. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation. Vidéo

4. Equation différentielle $y' = ay + f$

Théorème

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I. Etant donnée une solution particulière y_0 de l'équation différentielle $y' = ay + f$, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} + y_0(x)$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple :
On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.
1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution de l'équation.
2. En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation. Vidéo