Chapitre 12

Somme de variables aléatoires

Les savoir-faire

120. Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires.
121. Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire.
122. Sommer des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.

I. Variables aléatoires $X+Y$ et aX

1. Variable aléatoire $X+Y$

X et Y sont deux variables aléatoires définies sur l'univers d'une expérience aléatoire.
X prend les valeurs a_1, a_2, ..., a_n et Y prend les valeurs b_1, b_2, ..., b_n.

Définitions

— La variable aléatoire $X+Y$ prend toutes les valeurs possibles a_i+b_j avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$.
— Loi de probabilité de $X+Y$: pour toute valeur w prise par $X+Y$, $P(X+Y=w)$ est la somme de toutes les probabilités $P(\{X=a_i\} \cap \{Y=a_j\})$ où $a_i+b_j=w$.

Exemple :
On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties :
• La 1ère partie consiste à lancer une pièce de monnaie. Si on tombe sur "pile", on gagne 1 €, si on tombe sur face, on gagne 2 €.
• La deuxième partie consiste à lancer un dé à six faces. Si on tombe sur un chiffre pair, on gagne 1 €, si on tombe sur le "3" ou le "5", on gagne 2 €. Si on tombe sur le "1", on perd 5 €.
La v.a X désigne les gains de la 1ère partie et la v.a Y désigne les gains de la 2ième partie. Les v.a sont indépendantes.
Etablir la loi de probabilité de la v.a somme $S=X+Y$ donnant le gain total cumulé à la fin des deux parties. Vidéo

2. Variable aléatoire aX

a désigne un réel non nul.

Définitions

— La variable aléatoire aX prend toutes les valeurs possibles $a \times a_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$.
— Loi de probabilité de aX : pour toute valeur w prise par aX, $P(aX=w)$ est la somme de toutes les probabilités $P(\{X=a_i\})$ où $a \times a_i = w$.

Exemple :
On lance un dé équilibré à six faces numérotés de à .
X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu et Y celle qui donne le double de ce numéro. Alors $Y=2X$.

3. Linéarité de l'espérance

Propriétés

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX) = aE(X)$

Exemple :
On lance un dé jaune et un dé vert équilibrés et comportant chacun six faces numérotées de 1 à 6. On note X et Y les v.a donnant respectivement les résultats affichés par le dé jaune et le dé vert.
$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$.
De même $E(Y) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$.
Donc $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3,5 + 3,5 = 7$.
Lorsqu'on lance deux dés, la somme obtenue est en moyenne 7 sur un très grand nombre de lancers.

II. Variables aléatoires indépendantes

Succession d'épreuves aléatoires indépendantes

On effectue successivement deux épreuves aléatoires indépendantes l'une de l'autre. Ainsi, l'issue de la première épreuve n'influence pas l'issue de la seconde.
On note X (resp Y) la v.a qui donne le résultat de la première (resp. seconde) épreuve.
On dit que les v.a sont indépendantes.

Conséquence :
Les événements $\{X = a_i\}$ et $\{Y = b_j\}$ snt indépendants, donc :

$$P(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}) = P(\{X = a_i\}) \times P(\{Y = b_j\})$$

Exemple :
On lance successivement deux dés équilibrés, l'un a quatre faces numéroté de 1 à 4 et l'autre à 6 faces numérotées 0,3, 3, 6, 6 et 6.
X (resp. Y) est la v.a qui donne le numéro obtenu avec la premier (resp. le second) dé.
Les v.a sont indépendantes car les deux lancers de dés le sont.
Ainsi, par exemple,
$P(\{X = 1\} \cap \{Y = 3\}) = P(\{X = 1\}) \times P(\{Y = 3\}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

III. Somme de variables aléatoires identiques et indépendantes

1. Somme de variables indépendantes suivant une même loi de Bernoulli

Propriétés

Si X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une li binomiale de paramètres n et p.
é

Exemple :
Si X_i suit une loi binomiale de paramètre $p = 0,17$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 12$, alors $X_1 + X_2 + ... + X_{12}$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,17$.

2. Décomposition d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

Propriétés

Pour X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, on a $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ où les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n sont des variable aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p.

Exemple :
Si X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$ alors $X = X_1 + X_2 + X_3$ où X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent une même loi de Bernoulli de paramètre p.

3. Espérance et variance

Propriétés

Pour X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, on a :

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p)$$

Exemple :
Un industriel fabrique des plats en verre qui doivent résister à de fortes température afin de pouvoir être utilisés dans un four de cuisson ; Pour vérifier la résistance du plat, on le soumet à une température de 350 $^\circ$C. On a constaté qu'en moyenne, sur un grand nombre de plats testés sortant de l'usine, 1,5 % des plats ne supportent pas une telle température et cassent.
On choisit au hasard 200 pats produits et on effectue pour chacun d'eux le test de résistance. Etant donné le grand nombre de plats produit, on admet que ce choix peut être assimilé à un tirage fait de façon indépendante avec remise.
On désigne par R la v.a comptant le nombre de plats résistants au test. Calculer $E(R)$ et $\sigma(R)$. Interpréter les résultats. Vidéo

IV. Somme et moyenne d'un échantillon

1. Echantillon d'une variable aléatoire

Propriétés

Une liste $(X_1; X_2; ...; X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi est appelé échantillon de taille n associé à cette loi.

Exemple :
Nabolos prend le même train cinq jours par semaine. On admet que la v.a X qui compte le nombre de retards suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,1$.
En répétant cette expérience pendant 8 semaines, on construit un échantillon $(X_1; ...; X_8)$ de taille 8 de cette loi de probabilité.

2. Espérance et variance

Propriétés

En considérant un échantillon de taille n $(X_1; ...; X_n)$ d'une variable aléatoire X, et en posant $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ (variable aléatoire somme) et $M_n = \dfrac{S_n}{n}$ (variable aléatoire moyenne), on a :
$E(S_n) = nE(X)$; $V(S_n) = nV(X)$ et $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$
$E(M_n) = E(X)$; $V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}$ et $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$