Intégration

www.mathGM.fr

Lycée Louise Michel (Gisors)

Les savoir-faire

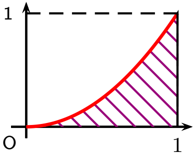
140. Calculer une intégrale à l'aide d'aires simples.
141. Calculer une intégrale à l'aide de primitives.
142. Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties.
143. Déterminer une aire à l'aide du calcul intégral.
144. Encadrer une intégrale.
145. Calculer et utiliser la valeur moyenne d'une fonction.

L'intro de Nabolos

Soit f la fonction carré définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe.

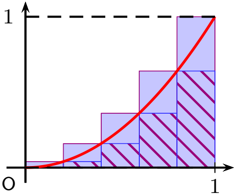
1. Donner un encadrement grossier de l'aire $\mathscr{A}$ hachurée.

2. On subdivise l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en 5 intervalles de même amplitude $\Delta x = 0,2$.



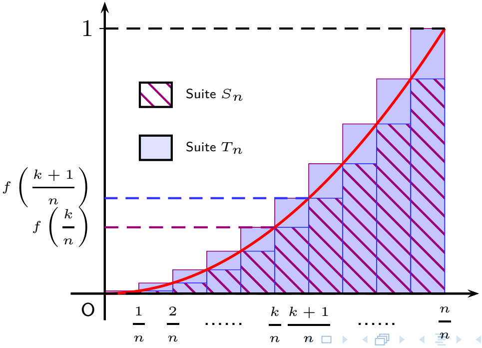
Sur chacun des intervalles $[x_k\ ;\ x_{k+1}]$ avec $0 \leqslant k < 5$, on détermine la valeur minimale et maximale de la fonction carrée.

Compléter le tableau ci-dessous et déterminer l'aire $\mathscr{A}_1$ somme des aires des rectangles hachurés et $\mathscr{A}_2$ somme des aires des rectangles bleus. En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.



x_k	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1
$f(x_k)$						

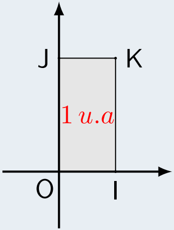
3. On subdivise l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en n intervalles. On obtient deux séries de rectangles et on définit deux suites :
La suite (S_n) des rectangles hachurés et la suite (T_n) des rectangles bleus.
Montrer que $S_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{6n^2}$ et $T_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{6n^2}$.
En déduire la valeur de $\mathscr{A}$.
On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.



Unité d'aire

Définition

Soit (O ; I ; J) un repère orthogonal du plan et K le point de coordonnées $(1;1)$.
L'aire du rectangle OIKJ définit l'unité d'aire (noté $u.a$).
Ainsi $\mathscr{A}_{\text{OIKJ}} = 1\,u.a$.

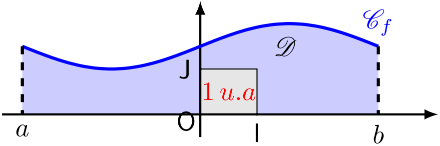


Définition

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$.
On appelle intégrale de a à b de f, l'aire $\mathscr{A}(\mathscr{D})$ (en $u.a$) de la partie $\mathscr{D}$ du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

$$\text{Ainsi : } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}(\mathscr{D}) \qquad \text{en} \qquad u.a$$

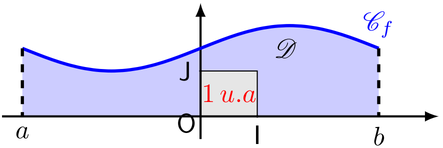


Définition

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$.
On appelle intégrale de a à b de f, l'aire $\mathscr{A}(\mathscr{D})$ (en $u.a$) de la partie $\mathscr{D}$ du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

$$\text{Ainsi : } \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \mathscr{A}(\mathscr{D}) \qquad \text{en} \qquad u.a$$



Exemple

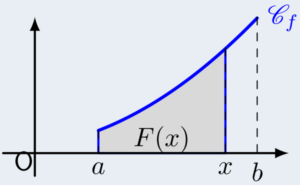
Calculer : $\displaystyle\int_{-1}^{5} \frac{1}{2}x + 3\ \mathrm{d}x$ $\boxed{\text{Vidéo}}$

Lien entre intégrale et dérivée

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$. La fonction F définie sur I par :

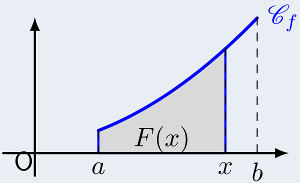
$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable sur I et a pour dérivée f.



Lien entre intégrale et dérivée

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$. La fonction F définie sur I par :
$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable sur I et a pour dérivée f.



Exemple

Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ 10]$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{2}\ \mathrm{d}t$. Etudier la fonction F puis tracer sa courbe représentative. Vidéo

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Pour tous réels a et b de I, on définit l'intégrale de a à b de la fonction f par :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Remarques :

- Une intégrale n'est pas forcément positive : elle ne correspond plus à l'aire d'un domaine.

- Lorsque f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, le nombre $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ est positif et correspond à l'aire du domaine délimité par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
- Une intégrale ne dépend pas de la primitive choisie pour la calculer.

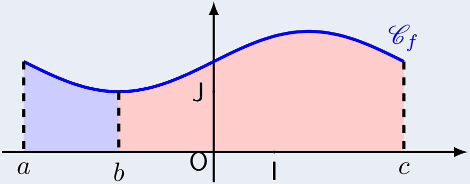
Relation de Chasles

Propriété

Additivité des aires (relation de Chasles) :

Pour tous a, b et c tels que $b \in [a\,;\,c]$:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x =$$



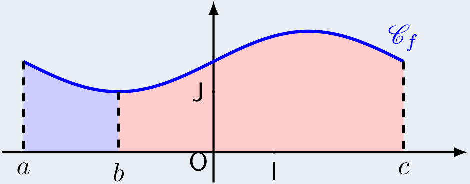
Relation de Chasles

Propriété

Additivité des aires (relation de Chasles) :

Pour tous a, b et c tels que $b \in [a\,;\,c]$:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$



Propriétés

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle et a, b et c trois réels de I.

Propriétés

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle et a, b et c trois réels de I.

- $\displaystyle\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x =$

Propriétés

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle et a, b et c trois réels de I.

- $\displaystyle\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$
- **Relation de Chasles :**
  $\displaystyle\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x =$

Propriétés

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle et a, b et c trois réels de I.

- $$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
- **Relation de Chasles :**
  $$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$
- **Linéarité :**
  $$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x =$$
  Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x =$

Propriétés

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle et a, b et c trois réels de I.

- $\displaystyle\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$
- **Relation de Chasles :**
  $\displaystyle\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x$
- **Linéarité :**
  $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$

  Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\ \mathrm{d}x =$

Propriétés

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle et a, b et c trois réels de I.

- $$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
- **Relation de Chasles :**
  $$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$
- **Linéarité :**
  $$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
  Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Propriétés

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

ATTENTION ! La réciproque de chacun de ces trois points est fausse !

Propriétés

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

- Si f est positive sur $[a\ ;\ b]$, alors

ATTENTION ! La réciproque de chacun de ces trois points est fausse !

Propriétés

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

- Si f est positive sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

ATTENTION ! La réciproque de chacun de ces trois points est fausse !

Propriétés

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

- Si f est positive sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si f est négative sur $[a\ ;\ b]$, alors

ATTENTION ! La réciproque de chacun de ces trois points est fausse !

Propriétés

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

- Si f est positive sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si f est négative sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

ATTENTION ! La réciproque de chacun de ces trois points est fausse !

Propriétés

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

- Si f est positive sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si f est négative sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.
- Si $f \leqslant g$ sur $[a\ ;\ b]$, alors

ATTENTION ! La réciproque de chacun de ces trois points est fausse !

Propriétés

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

- Si f est positive sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si f est négative sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant 0$.
- Si $f \leqslant g$ sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$.

ATTENTION ! La réciproque de chacun de ces trois points est fausse !

Exemples

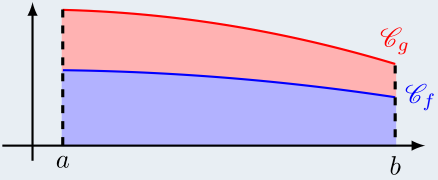
Exemples

1. Calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{3}{x^2}\mathrm{d}x$ Vidéo
2. Calculer $\displaystyle\int_2^5 (3x^2+4x-5)\mathrm{d}x$ Vidéo
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}\mathrm{d}x$ Vidéo

Conservation de l'ordre

Propriété

On considère deux fonctions f et g définies et continues et positives sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Si pour tout nombre réel $x \in [a\ ;\ b]$, on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors :

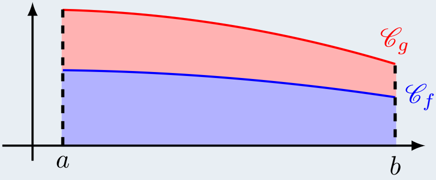


Conservation de l'ordre

Propriété

On considère deux fonctions f et g définies et continues et positives sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Si pour tout nombre réel $x \in [a\ ;\ b]$, on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$



Intégration par parties

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Soient a et b deux réels de I.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x$$

Exemple :

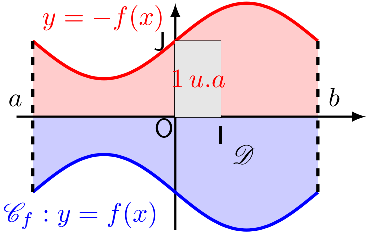
Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\ \mathrm{d}x$ Vidéo

Avec une fonction négative

Propriété

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;\,b]$. L'aire $\mathscr{A}(\mathscr{D})$ (en $u.a$) du domaine $\mathscr{D}$ du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_a^b -f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \quad \text{en} \quad u.a$$



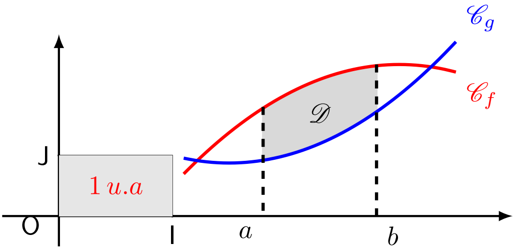
$$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_a^b -f(x)\ \mathrm{d}x$$

Aire entre deux courbes

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\ ;\ b]$ telles que $f \geqslant g$ sur $[a\ ;\ b]$.
L'aire (en unités d'aire) du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\mathscr{A}(\mathscr{D}) =$$

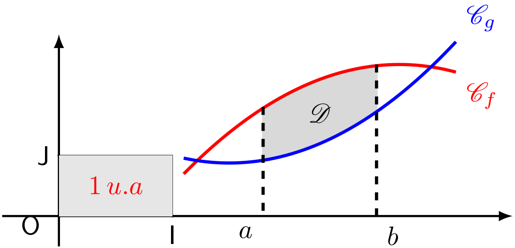


Aire entre deux courbes

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\ ;\ b]$ telles que $f \geqslant g$ sur $[a\ ;\ b]$.
L'aire (en unités d'aire) du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_a^b (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x$$

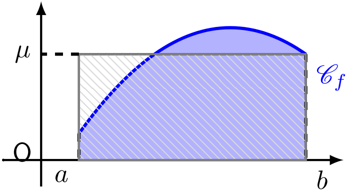


Valeur moyenne

Définition

On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. On appelle **valeur moyenne de f entre a et b** le nombre μ tel que :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$



Remarque : Dans le cas où f est strictement positive sur $[a\ ;\ b]$, la valeur moyenne de f correspond à la hauteur du rectangle de largeur $(b-a)$ ayant la même aire que le domaine sous la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exemples

Aires

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$. Déterminer l'aire délimitée par les courbes de f et g sur $[-1 \, ; \, 2]$. Vidéo

Exemples

Aires

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$. Déterminer l'aire délimitée par les courbes de f et g sur $[-1 ; 2]$. Vidéo

Valeur moyenne

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie. Au x-ième jour, le nombre de malades est égal à : $f(x) = 16x^2 - x^3$.

Déterminer le nombre moyen de malades sur la période 16 jours. Donner une interprétation graphique du résultat. Vidéo