# Loi des grands nombres

www.mathGM.fr

Lycée Louise Michel (Gisors)

# Les savoir-faire





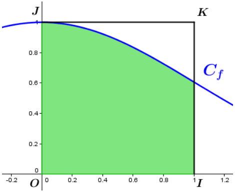
150. Connaître et savoir utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
151. Connaître et savoir utiliser l'inégalité de concentration.

# L'intro de Nabolos

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

L'objectif est de déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine en vert défini par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des ordonnées et la droite verticale d'équation $x = 1$.




Pour cela on va utiliser la méthode de Monte-Carlo.

La méthode de Monte-Carlo est une méthode probabiliste basée sur l'observation d'un grand nombre d'issues.

Elle permet, par le calcul de probabilités, de déterminer des valeurs approchées d'aires.

On considère l'épreuve de Bernoulli consistant à choisir au hasard un point de coordonnées $(x; y)$ dans le carré $OJKI$ de côté 1.

On appelle succès l'événement "Le point choisi est sous la courbe représentative de la fonction $f$" et échec "Le point choisi est au dessus de la courbe représentative de la fonction $f$".

On va réaliser $n$ fois cette expérience de Bernoulli de manière successive et indépendante.

On admet que la probabilité de cet événement est $p = \dfrac{\text{aire sous la courbe}}{\text{aire du carré}}$.

# L'intro de Nabolos





Comme l'aire du carré $OJKI$ est de 1, on a $p =$ aire sous la courbe.

# L'intro de Nabolos





Comme l'aire du carré $OJKI$ est de 1, on a $p =$ aire sous la courbe.

1. - Quelle est la loi de probabilité de chaque variable aléatoire $X_i$.

# L'intro de Nabolos





Comme l'aire du carré $OJKI$ est de 1, on a $p =$ aire sous la courbe.

1.
- Quelle est la loi de probabilité de chaque variable aléatoire $X_i$.
- Soit $S_n$ la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

# L'intro de Nabolos





Comme l'aire du carré $OJKI$ est de 1, on a $p =$ aire sous la courbe.

1.
- Quelle est la loi de probabilité de chaque variable aléatoire $X_i$.
- Soit $S_n$ la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
  - Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $S_n$ ?

# L'intro de Nabolos





Comme l'aire du carré $OJKI$ est de 1, on a $p =$ aire sous la courbe.

1.
   - Quelle est la loi de probabilité de chaque variable aléatoire $X_i$.
   - Soit $S_n$ la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
     - Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $S_n$ ?
     - Déterminer son espérance, sa variance et son écart type en fonction de $n$ et de $p$.

Comme l'aire du carré $OJKI$ est de 1, on a $p =$ aire sous la courbe.

1.
   - Quelle est la loi de probabilité de chaque variable aléatoire $X_i$.
   - Soit $S_n$ la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
     - Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $S_n$ ?
     - Déterminer son espérance, sa variance et son écart type en fonction de $n$ et de $p$.
2. Soient $a$ un réel strictement positif et $n$ un entier naturel non nul.

# L'intro de Nabolos



Comme l'aire du carré $OJKI$ est de 1, on a $p =$ aire sous la courbe.

1.
   - Quelle est la loi de probabilité de chaque variable aléatoire $X_i$.
   - Soit $S_n$ la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
     - Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $S_n$ ?
     - Déterminer son espérance, sa variance et son écart type en fonction de $n$ et de $p$.
2. Soient $a$ un réel strictement positif et $n$ un entier naturel non nul.
   - Démontrer que $p\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant a\right) \leq \dfrac{1}{4na^2}$.

# L'intro de Nabolos



Comme l'aire du carré $OJKI$ est de 1, on a $p =$ aire sous la courbe.

1.
   - Quelle est la loi de probabilité de chaque variable aléatoire $X_i$.
   - Soit $S_n$ la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
     - Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $S_n$ ?
     - Déterminer son espérance, sa variance et son écart type en fonction de $n$ et de $p$.
2. Soient $a$ un réel strictement positif et $n$ un entier naturel non nul.
   - Démontrer que $p\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant a\right) \leq \dfrac{1}{4na^2}$.
   - En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} p\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant a\right) = 0$.

# L'intro de Nabolos

Comme l'aire du carré $OJKI$ est de 1, on a $p =$ aire sous la courbe.

1.
   - Quelle est la loi de probabilité de chaque variable aléatoire $X_i$.
   - Soit $S_n$ la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
     - Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $S_n$ ?
     - Déterminer son espérance, sa variance et son écart type en fonction de $n$ et de $p$.

2. Soient $a$ un réel strictement positif et $n$ un entier naturel non nul.
   - Démontrer que $p\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant a\right) \leq \dfrac{1}{4na^2}$.
   - En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} p\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant a\right) = 0$.

3. En déduire une condition sur $n$ pour que $\dfrac{S_n}{n}$ soit une valeur approchée de la proportion $p$ à $10^{-2}$ près avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99.

# Inégalité de Markov

## Propriété

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs positives et soit $a$ un nombre réel strictement positif.

On a $p\big(X \geqslant a\big) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$.

**Interprétation :**
Cette propriété signifie que la probabilité que la variable aléatoire $X$ prenne des valeurs plus grandes que $a$ est d'autant plus petite que $a$ est grand.
**Remarque :**
Si $a \leqslant E(X)$, alors $\dfrac{E(X)}{a} \geqslant 1$ et donc l'inégalité de Markov n'a pas d'intérêt. On dit alors qu'elle est **triviale**.
En effet la borne $\dfrac{E(X)}{a}$ est alors supérieure à 1 et donc, nécessairement supérieure à $p\big(X \geqslant a\big)$.

# Inégalité de Bienaymé-Tchebychev



## Propriété

Soit $X$ une variable aléatoire et soit $\delta$ un nombre réel strictement positif.

On a $p\left(|X - E(X)| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.

**Interprétation :**
La probabilité que les valeurs prises par la variable aléatoire $X$ s'écartent d'au moins $\delta$ de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que $\delta$ est grand.

**Remarques :**

**Exemple :**
Soit $X$ une v.a qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.
Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter. Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$ et $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ? Vidéo

# Inégalité de Bienaymé-Tchebychev



## Propriété

Soit $X$ une variable aléatoire et soit $\delta$ un nombre réel strictement positif.

On a $p\Big( |X - E(X)| \geqslant \delta\Big) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.

**Interprétation :**
La probabilité que les valeurs prises par la variable aléatoire $X$ s'écartent d'au moins $\delta$ de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que $\delta$ est grand.

**Remarques :**

- $1 - p\Big( |X - E(X)| \geqslant \delta\Big) = p\Big(|X - E(X)| < \delta\Big) = p\Big(E(X) - \delta < X < E(X) + \delta\Big)$.

**Exemple :**
Soit $X$ une v.a qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.
Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter. Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$ et $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ? Vidéo

# Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

## Propriété

Soit $X$ une variable aléatoire et soit $\delta$ un nombre réel strictement positif.

On a $p\Big(\,|X - E(X)| \geqslant \delta\Big) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.

**Interprétation :**
La probabilité que les valeurs prises par la variable aléatoire $X$ s'écartent d'au moins $\delta$ de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que $\delta$ est grand.

**Remarques :**

- $1 - p\Big(\,|X - E(X)| \geqslant \delta\Big) = p\Big(|X - E(X)| < \delta\Big) = p\Big(E(X) - \delta < X < E(X) + \delta\Big)$.
- On dit que l'intervalle $\Big[E(X) - \delta ; E(X) + \delta\Big]$ est un intervalle de fluctuation de la variable aléatoire $X$

**Exemple :**
Soit $X$ une v.a qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.
Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter. Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$ et $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ? Vidéo

# Inégalité de concentration



## Théorème

Soit $X$ une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.
On pose $M_n$ la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille $n$ de $X$.

Autrement dit, $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, où $X_i$ sont indépendantes et de même loi de probabilité (celle de $X$).

Alors, pour tout réel $\delta > 0$, $P(|M_n - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(X)}{n\delta^2}$.
Cette inégalité est appelée **inégalité de concentration**.

**Exemple :**
Soit $X$ une v.a qui suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,2. On considère un échantillon de $n$ variables aléatoires suivant la loi de $X$. On appelle $M_n$ la variable aléatoire moyenne associée cet échantillon.
Déterminer la taille $n$ de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne $M_n$ appartienne à l'intervalle $]0,03;0,37[$ soit supérieure à 0,95. Vidéo

# Loi faible des grands nombres



## Théorème

Soit $(X_n)$ un échantillon d'une variable aléatoire. On pose $M_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Alors, pour tout réel $\delta > 0$ :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geqslant \delta) = 0.$$