Chapitre 15

Loi des grands nombres

Les savoir-faire

150. Connaître et savoir utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

151. Connaître et savoir utiliser l'inégalité de concentration.

I. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1. Inégalité de Markov

Propriété

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et soit a un nombre réel strictement positif.
On a $p\big(X \geqslant a\big) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$.

Interprétation :
Cette propriété signifie que la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grand.

Remarque :
Si $a \leqslant E(X)$, alors $\dfrac{E(X)}{a} \geqslant 1$ et donc l'inégalité de Markov n'a pas d'intérêt. On dit alors qu'elle est **triviale**.
En effet la borne $\dfrac{E(X)}{a}$ est alors supérieure à 1 et donc, nécessairement supérieure à $p\big(X \geqslant a\big)$.

2. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété

Soit X une variable aléatoire et soit δ un nombre réel strictement positif.
On a $p\big(\,|X - E(X)| \geqslant \delta\big) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.

Interprétation :
La probabilité que les valeurs prises par la variable aléatoire X s'écartent d'au moins δ de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que δ est grand.

Remarques :

- $1 - p\big(\,|X - E(X)| \geqslant \delta\big) = p\big(|X - E(X)| < \delta\big) = p\big(E(X) - \delta < X < E(X) + \delta\big)$.
- On dit que l'intervalle $\big[E(X) - \delta; E(X) + \delta\big]$ est un intervalle de fluctuation de la variable aléatoire X

Exemple :
Soit X une v.a qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.
Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter. Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$ et $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ? Vidéo

II. Loi des grands nombres

1. Inégalité de concentration

Théorème

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.
On pose M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X.

Autrement dit, $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, où X_i sont indépendantes et de même loi de probabilité (celle de X).

Alors, pour tout réel $\delta > 0$, $P(|M_n - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(X)}{n\delta^2}$.
Cette inégalité est appelée **inégalité de concentration**.

Exemple :
Soit X une v.a qui suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,2. On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X. On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée cet échantillon.
Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0,03; 0,37[$ soit supérieure à 0,95. Vidéo

2. Loi faible des grands nombres

Théorème

Soit (X_n) un échantillon d'une variable aléatoire. On pose $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Alors, pour tout réel $\delta > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - E(X)| \geqslant \delta) = 0.$$