Chapitre 1

Raisonnement par récurrence

Les savoir-faire

10. Savoir mener un raisonnement par récurrence.

11. Utiliser le raisonnement par récurrence pour étudier une suite.

I. Le raisonnement par récurrence

1. Principe du raisonnement

Théorème

Soit $\mathscr{P}_n$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. Si :
- il existe un entier naturel n_0 tel que $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie (**Initialisation**) ;
- pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}_n$ vraie implique $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie (**Hérédité**) ;

Alors $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

Méthode :
Soit $\mathscr{P}_n$ une propriété dépendant d'un entier naturel n.
Pour montrer que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, on procède en deux étapes :

- **Initialisation :** On montre que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour n_0 (le plus souvent, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$). On dit que la propriété est **initialisée** au rang n_0 (c'est-à-dire : $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie) ;
- **Hérédité :** On suppose la propriété $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier naturel n fixé et quelconque, et on montre que, sous cette hypothèse, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
  On dit que la propriété est **héréditaire**.

  ALORS

  On conclut que la propriété est vraie pour tout entier naturel n plus grand que n_0.

II. Exemples d'application

Exemple : Démontrer une célèbre inégalité
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ avec $a > 0$. Vidéo

Exemple : Démontrer une expression générale d'une suite
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :$u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = (n+1)^2$. Vidéo

Exemple : Démontrer la monotonie d'une suite
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :$u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.
Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante. Vidéo