

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et
combinaisons

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Lycée Louise Michel (Gisors)

Les savoir-faire

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

21. Utiliser les principes additif et multiplicatif.
22. Utiliser les k -uplets pour dénombrer.
23. Utiliser les k -uplets d'éléments distincts et les permutations pour dénombrer.
24. Utiliser les combinaisons pour dénombrer.
25. Utiliser une représentation adaptée pour dénombrer.

Le problème de Nabolos

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

Voici les règles du loto de la française des jeux :
Pour jouer au LOTO, il vous suffit de cocher 6 numéros : 5 numéros sur une grille de 49 numéros et 1 numéro chance sur une grille de 10 numéros.



Combien de grilles différentes peut-on constituer ?

Ensemble fini et cardinal

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

Définition

Soit n un entier naturel. Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que E est un ensemble fini.

Le nombre n d'éléments de E est appelé cardinal de E , noté $\text{Card}(E)$.

Exemple : $E = \{a; m; p; u\}$ est un ensemble fini à 4 éléments.
 $\text{Card}(E) = 4$.

Principe additif

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

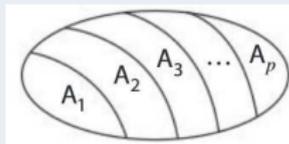
Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

Propriété : principe additif

Soient A_1, A_2, \dots, A_p , p ensembles
deux à deux disjoints.



On a :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_p)$$

Exemple : soient $A = \{a; b; c; d\}$ et $B = \{x; y\}$.

$A \cup B = \{a; b; c; d; x; y\}$ et $A \cap B = \emptyset$, donc

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 4 + 2 = 6.$$

Principe multiplicatif

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

Définitions

- Un **couple** de deux éléments a et b de E est la donnée de ces deux éléments dans un ordre particulier.

On le note $(a; b)$.

- Un **triplet** de trois éléments a , b et c de E est la donnée de ces trois éléments dans un ordre particulier.

On le note $(a; b; c)$.

- Le **produit cartésien** de E et F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (e, f) où $e \in E$ et $f \in F$.

Principe multiplicatif

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

Définitions

- Un **couple** de deux éléments a et b de E est la donnée de ces deux éléments dans un ordre particulier.

On le note $(a; b)$.

- Un **triplet** de trois éléments a , b et c de E est la donnée de ces trois éléments dans un ordre particulier.

On le note $(a; b; c)$.

- Le **produit cartésien** de E et F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (e, f) où $e \in E$ et $f \in F$.

Propriété : principe multiplicatif

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$$

Principe multiplicatif

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

Exemple :

$E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$. Alors :

$E \times F = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\}$.

$\text{Card}(E \times F) = 3 \times 2 = 6$.

Exemple :

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et deux desserts.

- Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?

Principe multiplicatif

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

Exemple :

$E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$. Alors :

$E \times F = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\}$.

$\text{Card}(E \times F) = 3 \times 2 = 6$.

Exemple :

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et deux desserts.

- 1 Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?
- 2 Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

Vidéo

Définitions

Un k -uplet de E est une liste ordonnée $(x_1; x_2; \dots; x_k)$ de k éléments de E . On note E^k l'ensemble des k -uplets de E .

Définitions

Un k -uplet de E est une liste ordonnée $(x_1; x_2; \dots; x_k)$ de k éléments de E . On note E^k l'ensemble des k -uplets de E .

Exemple :

Un code de carte bancaire est un 4-uplets de $E = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$.

Définitions

Un k -uplet de E est une liste ordonnée $(x_1; x_2; \dots; x_k)$ de k éléments de E . On note E^k l'ensemble des k -uplets de E .

Exemple :

Un code de carte bancaire est un 4-uplets de $E = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$.

Propriété

Si E est un ensemble de cardinal n , le nombre de k -uplets de E est n^k .

Définitions

Un k -uplet de E est une liste ordonnée $(x_1; x_2; \dots; x_k)$ de k éléments de E . On note E^k l'ensemble des k -uplets de E .

Exemple :

Un code de carte bancaire est un 4-uplets de $E = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$.

Propriété

Si E est un ensemble de cardinal n , le nombre de k -uplets de E est n^k .

Exemple :

Soit $E = \{a; b\}$. Le nombre de 3-uplets de E est 2^3 .

$E^3 = \{(a; a; a); (a; a; b); (a; b; a); (a; b; b); (b; a; a); (b; a; b); (b; b; a); (b; b; b)\}$.

Nombre de k -uplets d'un ensemble à n éléments

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

Définitions

Un k -uplet de E est une liste ordonnée $(x_1; x_2; \dots; x_k)$ de k éléments de E . On note E^k l'ensemble des k -uplets de E .

Exemple :

Un code de carte bancaire est un 4-uplets de $E = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$.

Propriété

Si E est un ensemble de cardinal n , le nombre de k -uplets de E est n^k .

Exemple :

Soit $E = \{a; b\}$. Le nombre de 3-uplets de E est 2^3 .

$E^3 = \{(a; a; a); (a; a; b); (a; b; a); (a; b; b); (b; a; a); (b; a; b); (b; b; a); (b; b; b)\}$.

Exemple :

Le refrain de la chanson "Digicode" de l'artiste *Oldelaf* comporte une erreur à corriger : **Vidéo**

"Il y avait pour entrer juste un digicode.
Deux lettres et dix chiffres incommodes
Un détail que t'avais sûrement oublié
4 milliards de possibilités".

Théorème

Soit n un entier non nul et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$.

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Le nombre de k -uplets d'éléments deux à deux distincts de E est :

$$n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Exemple :

Lors d'une course du 100 mètres disputée par 9 athlètes, il y a $9 \times 8 \times 7$, soit 504 podiums possibles différents.

Exemple :

Pour nettoyer un appareil électrique, Fred débranche les trois prises à l'arrière de l'appareil.

Mais au moment d'effectuer à nouveau les branchements, il se rend compte qu'il existe 12 positions différentes pour les trois prises. Comme il n'a pas pris soin de noter les positions respectives des 3 prises et qu'il n'y connaît rien en électronique, il décide d'effectuer les branchements au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il retrouve le bon branchement ? Vidéo

Définition : permutation

On appelle **permutations** d'un ensemble E à n éléments tout n -uplets d'éléments deux à deux distincts de E .

Définition : permutation

On appelle **permutations** d'un ensemble E à n éléments tout n -uplets d'éléments deux à deux distincts de E .

Exemple :

Les permutations de $E = \{a; b; c\}$ sont :

$(a; b; c); (a; c; b); (b; c; a); (b; a; c); (c; a; b); (c; b; a)$.

Définition : permutation

On appelle **permutations** d'un ensemble E à n éléments tout n -uplets d'éléments deux à deux distincts de E .

Exemple :

Les permutations de $E = \{a; b; c\}$ sont :

$(a; b; c); (a; c; b); (b; c; a); (b; a; c); (c; a; b); (c; b; a)$.

Définition : permutation

Le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments ($n \leq 1$) est le nombre noté $n!$ (qui se lit "**factorielle n** " ou " **n factorielle**", défini par :

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$$

Définition : permutation

On appelle **permutations** d'un ensemble E à n éléments tout n -uplets d'éléments deux à deux distincts de E .

Exemple :

Les permutations de $E = \{a; b; c\}$ sont :

$(a; b; c); (a; c; b); (b; c; a); (b; a; c); (c; a; b); (c; b; a)$.

Définition : permutation

Le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments ($n \leq 1$) est le nombre noté $n!$ (qui se lit "**factorielle n** " ou " **n factorielle**", défini par :

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$$

Remarque : $0! = 1$.

Nombre de parties d'un ensemble

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

Définition : parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. Dire qu'un ensemble F est une **partie** de E (ou que F est un sous-ensemble de E , ou que F est inclus dans E) signifie que tous les éléments de F sont des éléments de E .

Nombre de parties d'un ensemble

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

Définition : parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. Dire qu'un ensemble F est une **partie** de E (ou que F est un sous-ensemble de E , ou que F est inclus dans E) signifie que tous les éléments de F sont des éléments de E .

Remarque : il ne faut pas confondre une partie d'un ensemble avec un k -uplets. Par exemple, $\{1; 2\} = \{2; 1\}$ est une partie à deux éléments, tandis que $(1; 2)$ et $(2; 1)$ sont des couples distincts.

Nombre de parties d'un ensemble

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

Définition : parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. Dire qu'un ensemble F est une **partie** de E (ou que F est un sous-ensemble de E , ou que F est inclus dans E) signifie que tous les éléments de F sont des éléments de E .

Remarque : il ne faut pas confondre une partie d'un ensemble avec un k -uplets. Par exemple, $\{1; 2\} = \{2; 1\}$ est une partie à deux éléments, tandis que $(1; 2)$ et $(2; 1)$ sont des couples distincts.

Définition : parties d'un ensemble

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de parties de E est 2^n .

Exemple :

Soit $E = \{a; b; c\}$. Les parties de E sont : $\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}$.
Il y en a $2^3 = 8$.

Définition : combinaison

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$ et E un ensemble fini de cardinal n .

On appelle **combinaison de k éléments de E** toute partie de E ayant k éléments. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments de E .

Exemple : Soit $E = \{a; b; c; d\}$. Ainsi $n = 4$.

- Les combinaisons formés d'un élément de E sont : $\{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}$.

Il y en a 4. Ainsi : $\binom{4}{1} = 4$.

- L'ensemble vide est la seule combinaison de 0 éléments de E . Ainsi : $\binom{4}{0} = 1$.

Propriété

Soit $0 \leq k \leq n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

En particulier : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$.

Exemple :

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = 10.$$

Propriétés des combinaisons

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

Propriété : symétrie

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Remarque : Dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties à $(n-k)$ éléments qui en sont les complémentaires. $\binom{4}{1} = \binom{4}{3}$.

Propriétés des combinaisons

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k -uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

Propriété : symétrie

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Remarque : Dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties à $(n-k)$ éléments qui en sont les complémentaires. $\binom{4}{1} = \binom{4}{3}$.

Propriété

Pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Triangle de Pascal

Combinatoire et dénombrement

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Principe additif et multiplicatif

k-uplets d'un ensemble fini

Parties d'un ensemble et combinaisons

Propriété : formule de Pascal

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\ = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

k \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...									

Exemples :

Calculer un coefficient binomial. [Vidéo](#)

Utiliser le triangle de Pascal. [Vidéo](#)