Chapitre 2

Combinatoire et dénombrement

Les savoir-faire

21. Utiliser les principes additif et multiplicatif.
22. Utiliser les k-uplets pour dénombrer.
23. Utiliser les k-uplets d'éléments distincts et les permutations pour dénombrer.
24. Utiliser les combinaisons pour dénombrer.
25. Utiliser une représentation adaptée pour dénombrer.

I. Principe additif et multiplicatif

1. Ensemble fini et cardinal

Définition

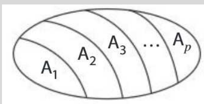
Soit n un entier naturel. Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que E est un ensemble fini.
Le nombre n d'éléments de E est appelé cardinal de E, noté $\text{Card}(E)$.

Exemple : $E = \{a; m; p; u\}$ est un ensemble fini à 4 éléments. $\text{Card}(E) = 4$.

2. Principe additif

Propriété : principe additif

Soient A_1, A_2, ... , A_p, p ensembles **deux à deux disjoints**.



On a :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + ... + \text{Card}(A_p)$$

Exemple :
Soient $A = \{a; b; c; d\}$ et $B = \{x; y\}$.
$A \cup B = \{a; b; c; d; x; y\}$ et $A \cap B = \emptyset$, donc $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 4 + 2 = 6$.

3. Principe multiplicatif

Définitions

• Un **couple** de deux éléments a et b de E est la donnée de ces deux éléments dans un ordre particulier.
On le note $(a; b)$.
• Un **triplet** de trois éléments a, b et c de E est la donnée de ces trois éléments dans un ordre particulier.
On le note $(a; b; c)$.
• Le **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (e, f) où $e \in E$ et $f \in F$.

Propriété : principe multiplicatif

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$$

Exemple : $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$. Alors : $E \times F = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\}$.
$\text{Card}(E \times F) = 3 \times 2 = 6$.

Exemple :
Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et deux desserts.

a. Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?

b. Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée. Vidéo

II. k-uplets d'un ensemble fini

1. Nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments

Définitions

Un k-uplet de E est une liste ordonnée $(x_1; x_2; ...; x_k)$ de k éléments de E. On note E^k l'ensemble des k-uplets de E.

Exemple : Un code de carte bancaire est un 4-uplets de $E = \{0; 1; 2; ....; 9\}$.

Propriété

Si E est un ensemble de cardinal n, le nombre de k-uplets de E est n^k.

Exemple :
Soit $E = \{a; b\}$. Le nombre de 3-uplets de E est 2^3.
$E^3 = \{(a; a; a); (a; a; b); (a; b; a); (a; b; b); (b; a; a); (b; a; b); ((b; b; a); (b; b; b)\}$.

Exemple :
Le refrain de la chanson "Digicode" de l'artiste *Oldelaf* comporte une erreur à corriger : Vidéo

"Il y avait pour entrer juste un digicode.
Deux lettres et dix chiffres incommodes
Un détail que t'avais surement oublié
4 milliards de possibilités".

2. k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble, permutations

Théorème

Soit n un entier non nul et k un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E est :

$$n(n-1)....(n-k+1)$$

Exemple :
Lors d'une course du 100 mètres disputée par 9 athlètes, il y a $9 \times 8 \times 7$, soit 504 podiums possibles différents.

Exemple :
Pour nettoyer un appareil électrique, Fred débranche les trois prises à l'arrière de l'appareil.
Mais au moment d'effectuer à nouveau les branchements, il se rend compte qu'il existe 12 positions différentes pour les trois prises.
comme il n'a pas pris soin de noter les positions respectives des 3 prises et qu'il n'y connaît rien en électronique, il décide d'effectuer les branchements au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il retrouve le bon branchement ? Vidéo

3. k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble, permutations

Définition : permutation

On appelle **permutations** d'un ensemble E à n éléments tout n-uplets d'éléments deux à deux distincts de E.

Exemple : Les permutations de $E = \{a; b; c\}$ sont :

$$(a; b; c); (a; c; b); (b; c; a); (b; a; c); (c; a; b); (c; b; a)\}$$

Définition : permutation

Le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments ($n \leqslant 1$) est le nombre noté $n!$ (qui se lit "**factorielle *n***" ou "***n* factorielle**", défini par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1$$

Remarque : $0! = 1$.

III. Parties d'un ensemble et combinaisons

1. Nombre de parties d'un ensemble

Définition : parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. Dire qu'un ensemble F est une **partie** de E (ou que F est un sous-ensemble de E, ou que F est inclus dans E) signifie que tous les éléments de F sont des éléments de E.

Remarque : il ne faut pas confondre une partie d'un ensemble avec un k-uplets. Par exemple, $\{1; 2\} = \{2; 1\}$ est une partie à deux éléments , tandis que $(1; 2)$ et $(2; 1)$ sont des couples distincts.

Définition : parties d'un ensemble

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de parties de E est 2^n.

Exemple : Soit $E = \{a; b; c\}$. Les parties de E sont : $\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}$.
Il y en a $2^3 = 8$

2. Combinaisons

Définition : combinaison

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et E un ensemble fini de cardinal n.
On appelle **combinaison de *k* éléments de *E*** toute partie de E ayant k éléments. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments de E.

Exemple : Soit $E = \{a; b; c; d\}$. Ainsi $n = 4$.

- Les combinaisons formés d'un élément de E sont : $\{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}$. Il y en a 4. Ainsi : $\binom{4}{1} = 4$.
- L'ensemble vide est la seule combinaison de 0 éléments de E. Ainsi : $\binom{4}{0} = 1$.

Propriété

Soit $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

En particulier : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$.

Exemple : $\dbinom{5}{3} = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{3!} = 10$.

Exemple :
Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire quatre délégués. Dans cet exercice, on ne distingue pas les délégué et les délégués adjoints.

a. Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?

b. Emma dit qu'elle ne souhaite pas être élue si Bastien est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ? Vidéo

3. Propriétés des combinaisons

Propriété : symétrie

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Remarque : Dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties à $(n-k)$ éléments qui en sont les complémentaires. $\dbinom{4}{1} = \dbinom{4}{3}$.

Propriété

Pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

4. Triangle de Pascal

Propriété : formule de Pascal

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	...	$k-1$	k	...
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
...											
$n-1$									$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$	
n										$\binom{n}{k}$	
...											

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Exemples :
Calculer un coefficient binomial. Vidéo
Utiliser le triangle de Pascal. Vidéo