# Chapitre 2

# Vecteurs, droites et plans de l'espace

### Les savoir-faire

**20.** Représenter et utiliser une décomposition linéaire de vecteurs donnés pour résoudre un problème.

**21.** Étudier les positions relatives de droites et de plans.

**22.** Utiliser les coordonnées pour résoudre des problèmes (alignement, colinéarité, coplanarité,...).

## I. Vecteurs de l'espace

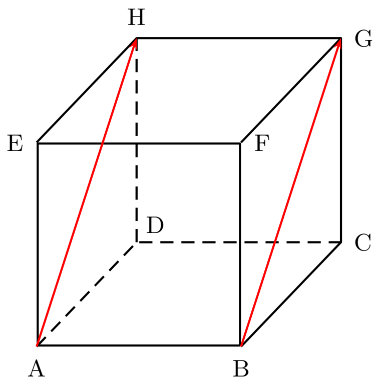
### 1. Définition

**Définition**

Soient $A$ et $B$ deux points de l'espace.
On associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à la translation qui transforme $A$ en $B$.
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, si et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme éventuellement aplati.
On peut alors noter $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\overrightarrow{u}$.

**Remarque :**
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

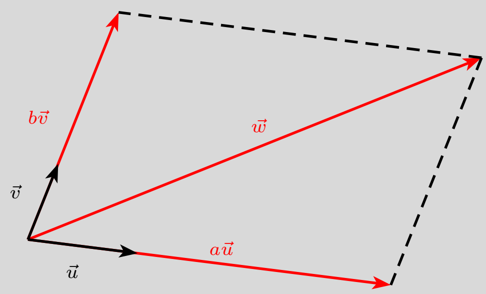
**Exemple :**
Dans le cube $ABCDEFGH$ les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont égaux car $ABGH$ est un rectangle.



## 2. Combinaisons linéaires de vecteurs

**Définition**

On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non colinéaires.
On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe des réels $a$ et $b$ tels que : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

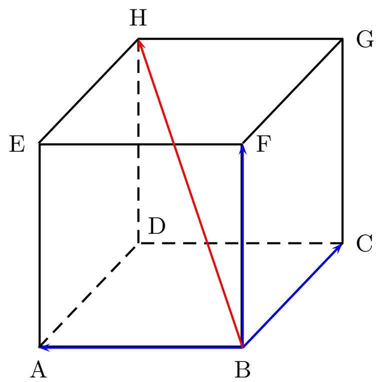



**Remarques :**

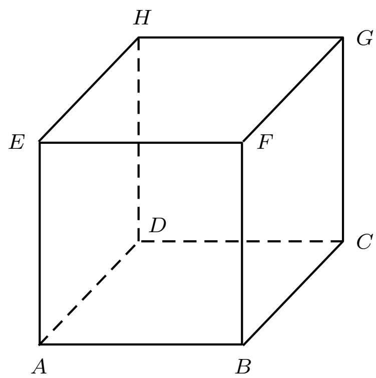
- On dit aussi que les trois vecteurs sont coplanaires.
- Dans le cas où $\vec{v} = a\vec{u}$ on dit que les vecteurs sont colinéaires.

**Exemple :**
Dans le cube $ABCDEFGH$, une écriture du vecteur $\overrightarrow{BH}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$ est :

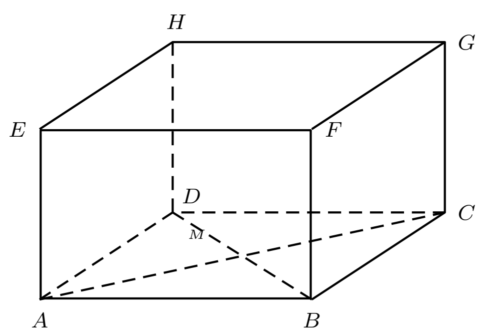
$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$$




**Exemple :**
A l'aide du cube représenter les vecteurs donnés par :
$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$
$\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$
$\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$ Vidéo




**Exemple :**
Dans le parallélépipède, $M$ est le centre du rectangle $ABCD$.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$. Vidéo



## II. Droites et plans de l'espace

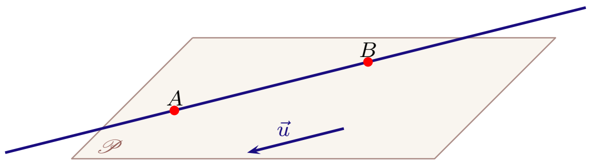
### 1. Droites de l'espace

**Définition**

Une droite de l'espace est définie :
- soit par la donnée de deux points distincts ;
- soit par la donnée d'un point et d'un vecteur non nul.

**Propriété : caractérisation d'une droite**

La droite passant par $A$ de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.



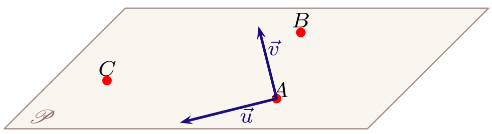

### 2. Plans de l'espace

**Définition**

Un plan de l'espace est défini :
- soit par trois points non alignés $A$, $B$ et $C$ ;
- soit par un point et deux vecteurs non colinéaires $(A; \vec{u}, \vec{v})$.

**Propriété : caractérisation d'un plan**

Le plan défini par le point $A$ et les vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

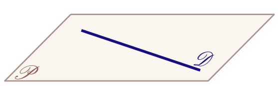
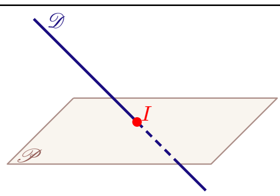
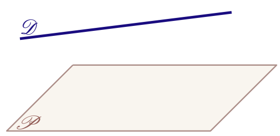



## III. Positions relatives de droites et plans.

### 1. Positions relatives d'une droite et d'un plan

**Propriétés**

Soit $\mathscr{P}$ un plan et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace. Trois cas peuvent se présenter :
- la droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$ ;
- la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants ;
- la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ n'ont aucun pont commun.

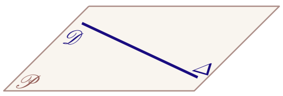
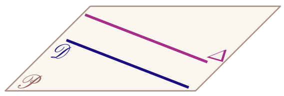
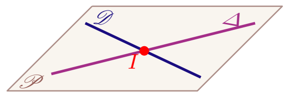
| | | |
|---|---|---|
|  $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$ |  $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants : $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \{I\}$ |  $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont disjoints : $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \varnothing$ |

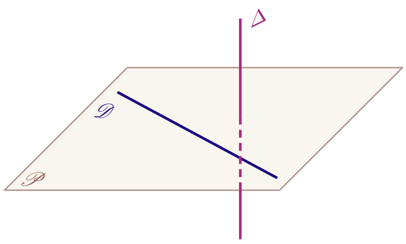
## 2. Positions relatives de deux droites

Deux droites sont coplanaires lorsqu'elles sont contenues dans le même plan.

**Propriétés**

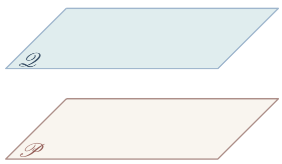
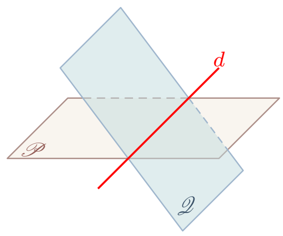
Soient $\mathscr{D}$ et $\Delta$ deux droites de l'espace. Quatre cas peuvent se présenter :
- les droites $\mathscr{D}$ et $\Delta$ sont confondues ;
- les droites $\mathscr{D}$ et $\Delta$ sont strictement parallèles ;
- les droites $\mathscr{D}$ et $\Delta$ sont sécantes ;
- les droites $\mathscr{D}$ et $\Delta$ ne sont pas coplanaires.

| **Droites coplanaires** | | |
|---|---|---|
| Droites parallèles | | Droites sécantes |
|  $\mathscr{D}$ et $\Delta$ sont confondues |  $\mathscr{D}$ et $\Delta$ sont strictement parallèles : $\mathscr{D} \cap \Delta = \varnothing$ |  $\mathscr{D}$ et $\Delta$ sont sécantes : $\mathscr{D} \cap \Delta = \{I\}$ |

| **Droites non coplanaires** |
|---|
|  |
| $\mathscr{D}$ et $\Delta$ sont non coplanaires : $\mathscr{D} \cap \Delta = \varnothing$ |

## 3. Positions relatives de deux plans

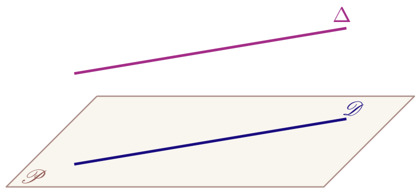
Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

| Plans parallèles | | Plans sécants |
|---|---|---|
|  Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont confondus |  Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont strictement parallèles |  Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants selon une droite $d$ |

## 4. Droite parallèle à un plan

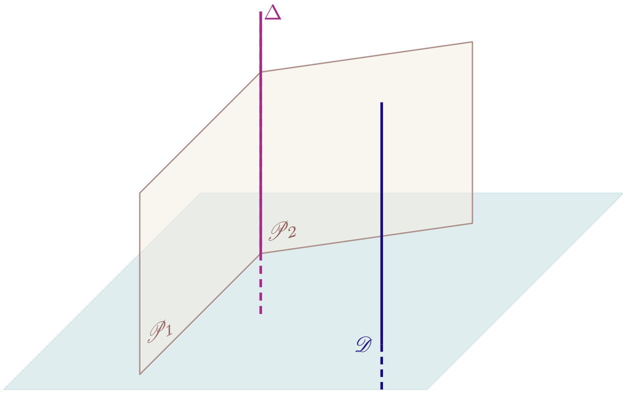
**Propriétés**

Si une droite $\Delta$ est parallèle à une droite $\mathscr{D}$ incluse dans un plan $\mathscr{P}$, alors $\Delta$ est parallèle à $\mathscr{P}$.



**Propriétés**

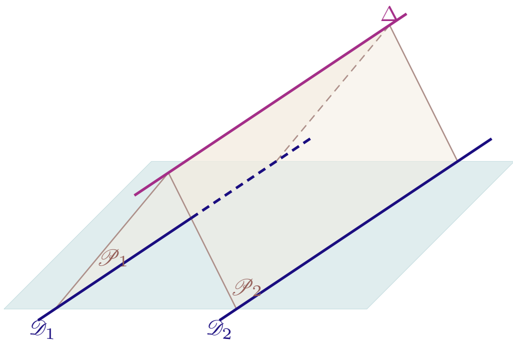
Si une droite $\mathscr{D}$ est parallèle à deux plans sécants $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, alors elle est parallèle à leur intersection.




## 5. Droites parallèles

**Théorème du toit**

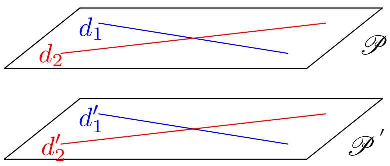
Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites parallèles.
Soit $\mathscr{P}_1$ un plan contenant la droite $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{P}_2$ un plan contenant la droite $\mathscr{D}_2$.
Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants, alors leur droite d'intersection est parallèle à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.




## 6. Plans parallèles

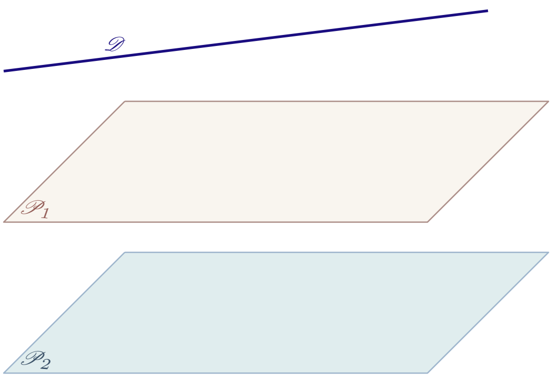
**Propriétés**

Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.



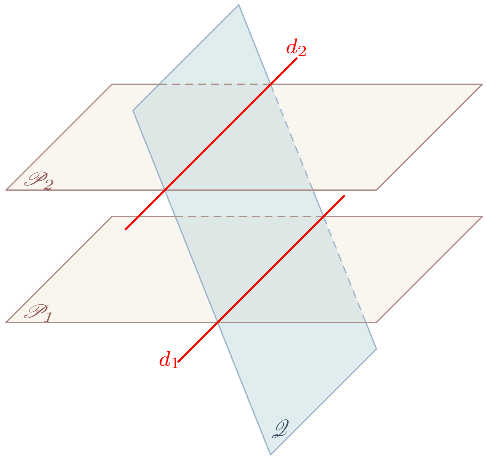

**Propriétés**

Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans parallèles. Alors, toute droite $\mathscr{D}$ parallèle à $\mathscr{P}_1$ est parallèle à $\mathscr{P}_2$.



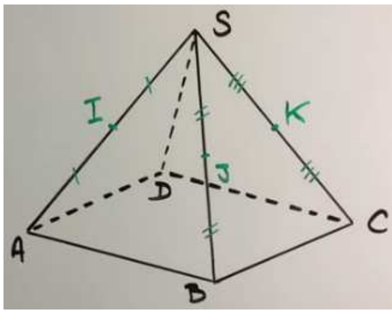
**Propriétés**

Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans parallèles, alors tout plan $\mathscr{Q}$ qui coupe le plan $\mathscr{P}_1$, coupe le plan $\mathscr{P}_2$ et les droites d'intersection sont parallèles.




**Exemple :**

$SABCD$ est une pyramide.
$I$, $J$ et $K$ sont les milieux respectifs de $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.
Démontrer que les plans $(IJK)$ et $(ABC)$ sont parallèles. Vidéo

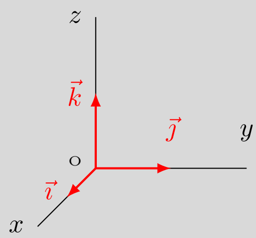



# IV. Repérage dans l'espace

## 1. Repère

**Repère**

Soit O un point de l'espace et trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ non coplanaires.
On dit que $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace et que $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est une base de l'espace.

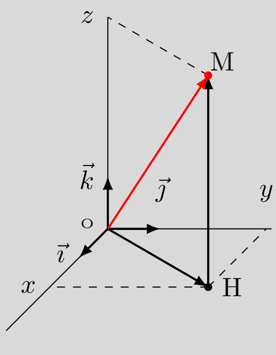



**Coordonnées**

Pour tout point $M$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de nombres réels tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont les coordonnées du point $M$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.




$x$ est l'abscisse, $y$ est l'ordonnée et $z$ est la cote du point $M$.
On note $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$.

**Propriétés**

Soit $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace.

— Pour tous points A $(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B\,(x_B ; y_B ; z_B)$ :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

— Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et tout réel $\lambda$ :

$$\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \;;\; \vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$$

— Si $I$ est le milieu de $[AB]$ alors :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2} ; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

**Exemples :**

**a.** Dans un repère de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(2;-1;4)$, $B(6;-7;0)$, $C(1;0;1)$ et $D(13;-16;5)$. Démontrer que les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires. Vidéo

**b.** Soit un parallélépipède $ABCDEFGH$.

$I$ est le milieu de $[CG]$. $M$ et $N$ son définis par : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FG}$.
Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de tous les points. Placer le point $K(1;3;-1)$. Vidéo