

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

[www.mathGM.fr](http://www.mathGM.fr)

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

# Orthogonalité et distances dans l'espace

[www.mathGM.fr](http://www.mathGM.fr)

Lycée Louise Michel (Gisors)

60. Calculer et utiliser un produit scalaire.
61. Etudier l'orthogonalité de droites et de plans.
62. Déterminer et utiliser un vecteur normal à un plan.
63. Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou un plan.

# Le problème de Nabolos

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

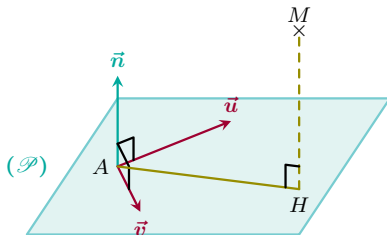
Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on considère un plan  $(\mathcal{P})$  passant par un point  $A$  et dirigé par deux vecteurs non colinéaires  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Soit  $\vec{n}$  un vecteur non nul, simultanément orthogonal à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .



1. Démontrer que  $\vec{n}$  est aussi orthogonal à tout vecteur  $\vec{w}$  de  $(\mathcal{P})$ .

En déduire que si  $M$  est un point de  $(\mathcal{P})$ , alors  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ .

2. Démontrons maintenant la réciproque.

Énoncer cette réciproque.

Soit  $M$  un point de l'espace.

On considère le point  $H$ , projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $(\mathcal{P})$ .

Démontrer, en calculant  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}$ , que si  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ , alors  $HM = 0$  puis en déduire que  $M \in (\mathcal{P})$ .

Énoncer la propriété démontrée.

# Produit scalaire dans l'espace

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Définition

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace et trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  étant coplanaires, le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est le réel  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  calculé dans le plan contenant les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

# Produit scalaire dans l'espace

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

[www.mathGM.fr](http://www.mathGM.fr)

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

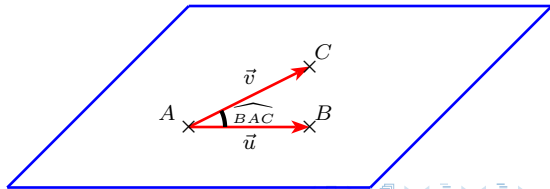
Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Expressions



# Produit scalaire dans l'espace

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

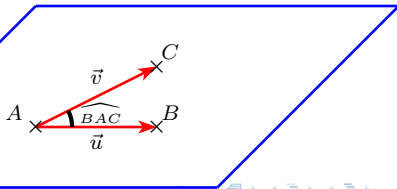
Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Expressions

- **Avec les normes** : pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,  
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$
  
et  $\vec{u} \cdot \vec{v} =$



# Produit scalaire dans l'espace

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Expressions

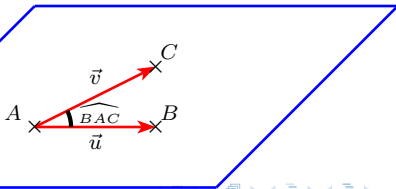
- **Avec les normes** : pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,  
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$
et 
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

- **Avec un angle** :

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points de l'espace,  $B$  et  $C$  étant distincts du point  $A$ .

Si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC}).$$



# Produit scalaire dans l'espace

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

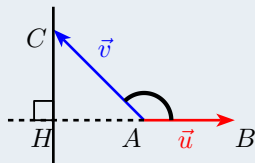
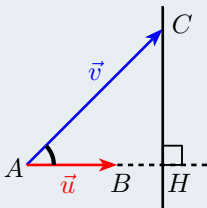
Calculs de distances

## Expressions

**Avec la projection orthogonale :**

Si  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  sont deux vecteurs de l'espace et si  $H$  est le projeté du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ , alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \quad .$$





# Produit scalaire dans l'espace

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Expressions

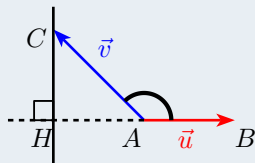
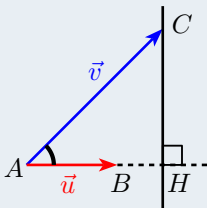
### Avec la projection orthogonale :

Si  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  sont deux vecteurs de l'espace et si  $H$  est le projeté du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ , alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

- si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  sont de même sens, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \quad ;$$



# Produit scalaire dans l'espace

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Expressions

### Avec la projection orthogonale :

Si  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  sont deux vecteurs de l'espace et si  $H$  est le projeté du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ , alors

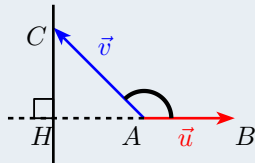
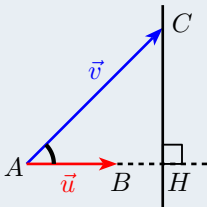
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

- si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  sont de même sens, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH ;$$

- si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  sont de sens contraire, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$



# Produit scalaire dans l'espace

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Expressions

### Avec la projection orthogonale :

Si  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  sont deux vecteurs de l'espace et si  $H$  est le projeté du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ , alors

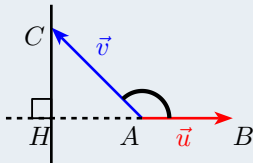
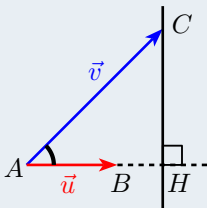
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

- si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  sont de même sens, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH ;$$

- si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  sont de sens contraire, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH.$$



# Exemple

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

[www.mathGM.fr](http://www.mathGM.fr)

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

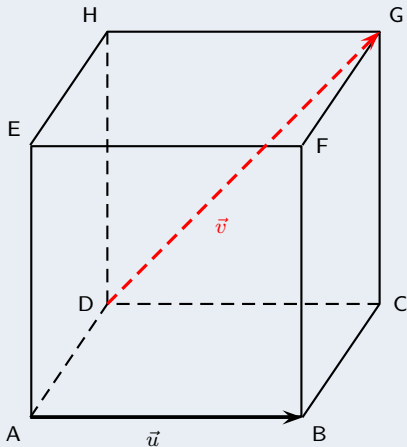
Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Exemple

On considère un cube  $ABCDEFCH$  d'arête  $a$ .  
Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .



Vidéo

# Orthogonalité de vecteurs

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

[www.mathGM.fr](http://www.mathGM.fr)

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Définition et propriétés

# Orthogonalité de vecteurs

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

[www.mathGM.fr](http://www.mathGM.fr)

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Définition et propriétés

- Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace sont orthogonaux lorsque  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

# Orthogonalité de vecteurs

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

[www.mathGM.fr](http://www.mathGM.fr)

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Définition et propriétés

- Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace sont orthogonaux lorsque  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  si et seulement si

# Orthogonalité de vecteurs

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Définition et propriétés

- Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace sont orthogonaux lorsque  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  si et seulement si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  ou  $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ .
- Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.



# Orthogonalité de vecteurs

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

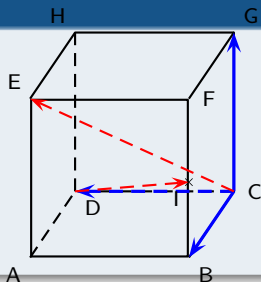
## Définition et propriétés

- Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace sont orthogonaux lorsque  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  si et seulement si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  ou  $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$  [ $\pi$ ].
- Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

## Exemple

On considère le repère  $(C ; \vec{CB} ; \vec{CD} ; \vec{CG})$ ,  $I$  est le milieu de  $[BF]$ .

Les vecteurs  $\vec{CE}$  et  $\vec{DI}$  sont-ils orthogonaux ? Vidéo



# Droites orthogonales

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Définition

Deux droites sont orthogonales, si et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

**Remarques :**

# Droites orthogonales

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Définition

Deux droites sont orthogonales, si et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

## Remarques :

- Deux droites orthogonales ne sont pas toujours coplanaires.

## Définition

Deux droites sont orthogonales, si et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

## Remarques :

- Deux droites orthogonales ne sont pas toujours coplanaires.
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes en un angle droit.

## Définition

Deux droites sont orthogonales, si et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

## Remarques :

- Deux droites orthogonales ne sont pas toujours coplanaires.
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes en un angle droit.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque est fausse.

## Définition

Deux droites sont orthogonales, si et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

## Remarques :

- Deux droites orthogonales ne sont pas toujours coplanaires.
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes en un angle droit.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque est fausse.

## Propriété

# Droites orthogonales

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Définition

Deux droites sont orthogonales, si et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

## Remarques :

- Deux droites orthogonales ne sont pas toujours coplanaires.
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes en un angle droit.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque est fausse.

## Propriété

- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

## Définition

Deux droites sont orthogonales, si et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

## Remarques :

- Deux droites orthogonales ne sont pas toujours coplanaires.
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes en un angle droit.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque est fausse.

## Propriété

- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.



# Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Définition

Soient un plan  $\mathcal{P}$  de base  $(\vec{u}, \vec{v})$  et une droite  $\mathcal{D}$  de vecteur directeur  $\vec{w}$ .

La droite  $\mathcal{D}$  et le plan  $\mathcal{P}$  sont perpendiculaires si  $\vec{w}$  est orthogonal à la fois à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ .

# Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

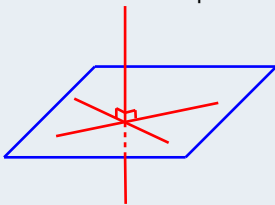
## Définition

Soient un plan  $\mathcal{P}$  de base  $(\vec{u}, \vec{v})$  et une droite  $\mathcal{D}$  de vecteur directeur  $\vec{w}$ .

La droite  $\mathcal{D}$  et le plan  $\mathcal{P}$  sont perpendiculaires si  $\vec{w}$  est orthogonal à la fois à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ .

## Propriétés

- Une droite est orthogonale à un plan, si et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.



# Exemples

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

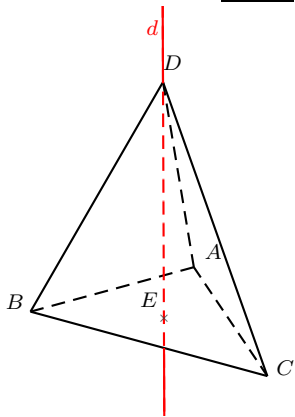
**Exemple :** Soit un tétraèdre régulier  $ABCD$  d'arêtes de longueur  $\ell$ .  
Démontrer que les arêtes  $[AD]$  et  $[BC]$  sont orthogonales. Vidéo

**Exemple :**  $ABC$  est un triangle  
équilatéral.

$E$  est le point d'intersection de  
ses médianes.

La droite  $d$  passant par  $E$  est  
orthogonale au plan  $(ABC)$ .  $D$   
est un point de la droite  $d$ .

Démontrer que les droites  
 $(BD)$  et  $(AC)$  sont  
orthogonales. Vidéo



# Vecteur normal

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

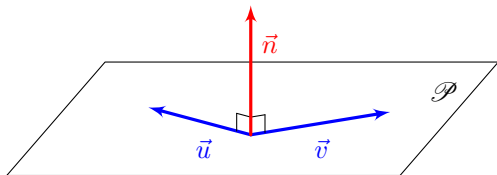
Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Définition

Un vecteur  $\vec{n}$  est normal à un plan  $\mathcal{P}$  lorsqu'il est :  
non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de  $\mathcal{P}$ .



Remarques :

# Vecteur normal

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

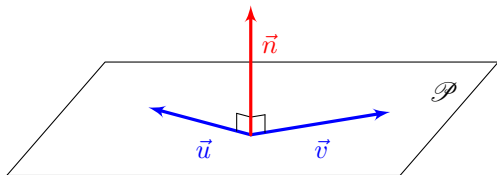
Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Définition

Un vecteur  $\vec{n}$  est normal à un plan  $\mathcal{P}$  lorsqu'il est :  
non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de  $\mathcal{P}$ .



## Remarques :

- Un plan admet une infinité de vecteurs normaux, tous colinéaires entre eux.

# Vecteur normal

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

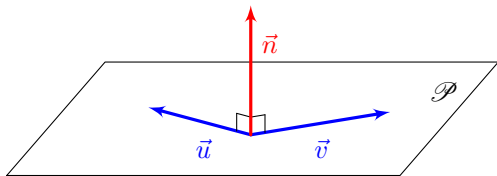
Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Définition

Un vecteur  $\vec{n}$  est normal à un plan  $\mathcal{P}$  lorsqu'il est :  
non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de  $\mathcal{P}$ .



## Remarques :

- Un plan admet une infinité de vecteurs normaux, tous colinéaires entre eux.
- Un vecteur normal à un plan  $\mathcal{P}$  est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à  $\mathcal{P}$ .

# Exemple

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

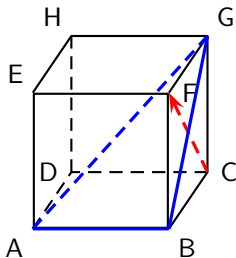
Calculs de distances

**Exemple :**

$ABCDEFGH$  est un cube.

Démontrer que le vecteur  
 $\vec{CF}$  est normal au plan  
 $(ABG)$ .

Vidéo



# Propriétés

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

[www.mathGM.fr](http://www.mathGM.fr)

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

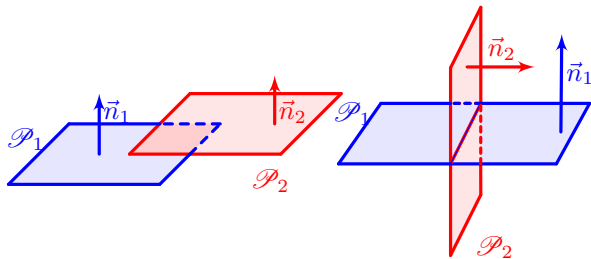
Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Propriétés





# Propriétés

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

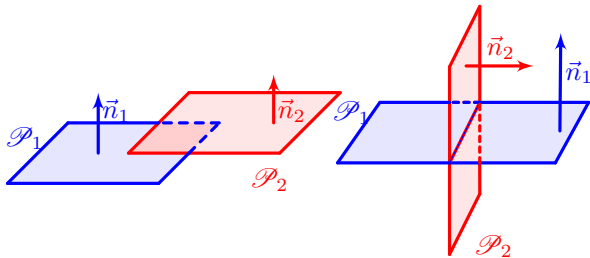
Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Propriétés

- Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur normal de l'un est un vecteur normal de l'autre.



# Propriétés

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

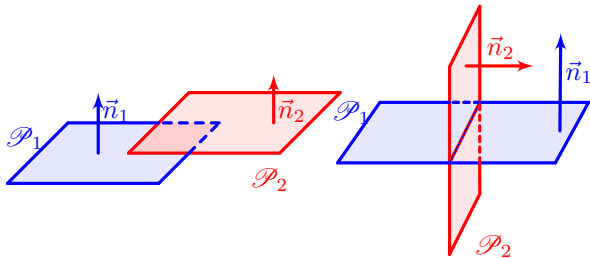
Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Propriétés

- Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur normal de l'un est un vecteur normal de l'autre.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.



# Projeté orthogonal d'un point

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

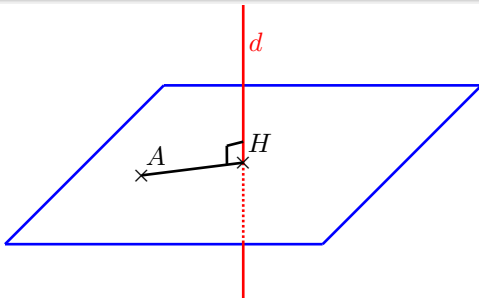
Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Définition : projeté orthogonal sur une droite

Soient  $A$  un point et  $d$  une droite de l'espace. Il existe un unique plan passant par  $A$  et orthogonale à  $d$ . La droite  $d$  est alors sécante avec ce plan et leur point d'intersection est appelé projeté orthogonal de  $A$  sur  $d$ .



# Projeté orthogonal d'un point

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

[www.mathGM.fr](http://www.mathGM.fr)

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

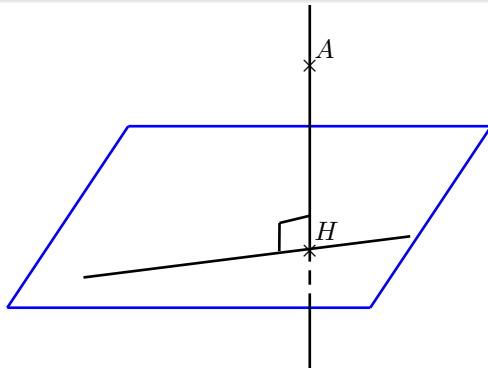
Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Définition : projeté orthogonal sur un plan

Soient  $A$  un point et  $\mathcal{P}$  un plan de l'espace. Il existe une unique droite passant par  $A$  et orthogonale à  $\mathcal{P}$ . Le plan  $\mathcal{P}$  est alors sécant avec cette droite et leur point d'intersection est appelé projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{P}$ .



## Définition

Une base orthonormée de l'espace est une base de l'espace telle que ses trois vecteurs soient orthogonaux deux à deux et tous de norme 1.

Autrement dit,  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée de l'espace si on a :

## Définition

Une base orthonormée de l'espace est une base de l'espace telle que ses trois vecteurs soient orthogonaux deux à deux et tous de norme 1.

Autrement dit,  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée de l'espace si on a :

- $$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

## Définition

Une base orthonormée de l'espace est une base de l'espace telle que ses trois vecteurs soient orthogonaux deux à deux et tous de norme 1.

Autrement dit,  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée de l'espace si on a :

- $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$
- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

## Définition

Une base orthonormée de l'espace est une base de l'espace telle que ses trois vecteurs soient orthogonaux deux à deux et tous de norme 1.

Autrement dit,  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée de l'espace si on a :

- $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$
- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

## Définition

Un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère tel que la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  soit orthonormée.



## Propriétés

Dans une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ .

On a alors :

## Propriétés

Dans une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ .

On a alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

## Propriétés

Dans une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ .

On a alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

# Propriétés

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

## Propriétés

Dans une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ .

On a alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

## Propriétés

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère deux points  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$ . On a alors :  
 $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ .

## Propriétés : distance d'un point à une droite

Le projeté orthogonal  $H$  d'un point  $A$  sur une droite  $d$  est le point de  $d$  le plus proche du point  $A$ .

La longueur  $AH$  est la distance du point  $A$  à la droite  $d$ .

## Propriétés : distance d'un point à une droite

Le projeté orthogonal  $H$  d'un point  $A$  sur une droite  $d$  est le point de  $d$  le plus proche du point  $A$ .

La longueur  $AH$  est la distance du point  $A$  à la droite  $d$ .

## Propriétés : distance d'un point à un plan

Le projeté orthogonal  $H$  d'un point  $A$  sur un plan  $\mathcal{P}$  est le point de  $\mathcal{P}$  le plus proche du point  $A$ .

La longueur  $AH$  est la distance du point  $A$  au plan  $\mathcal{P}$ .

# Exemples

Orthogonalité et  
distances dans l'espace

www.mathGM.fr

Les savoir-faire

Le problème de Nabolos

Produit scalaire à l'espace

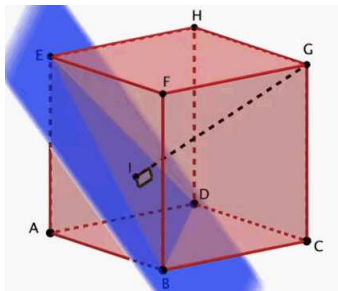
Orthogonalité dans l'espace

Vecteur normal, projeté orthogonal

Calculs de distances

**Exemple :**

On considère un cube  $ABCDEFGH$ . Calculer la distance du point  $G$  au plan  $BDE$ . [Vidéo](#)



**Exemple :**

Dans un repère orthonormé, on donne  $A(1 ; 2 ; -2)$ ,  $B(-1 ; 3 ; 1)$  et  $C(2 ; 0 ; -2)$ .

Déterminer un vecteur normal au plan  $(ABC)$ . [Vidéo](#)