

Chapitre 7

Dérivation, continuité et convexité

Les savoir-faire

- 70. Connaître et utiliser les dérivées des fonctions composées.
- 71. Etudier et utiliser la convexité d'une fonction.
- 72. Etudier une suite définie par une relation de récurrence.
- 73. Connaître et utiliser le TVI.

I. Compléments de dérivation

1. Fonctions composées

Définition : composée de deux fonctions

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout x de I , on ait $u(x) \in J$.

La fonction composée de u suivie de v , notée $v \circ u$, est la fonction définie par : $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

$$\begin{array}{ccc} x \mapsto u(x) & \mapsto & v(u(x)) \\ x & \longrightarrow & v \circ u(x) \end{array}$$

Exemples :

a. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Identifier la composée de deux fonctions dans la fonction f . Vidéo

b. On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
Exprimer les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ en fonction de x . Vidéo

2. Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I tel que, pour tout x de I , $u(x) \in J$ et v une fonction définie et dérivable sur J . Alors

$$\begin{aligned} f = v \circ u \text{ est dérivable sur } I \text{ et pour tout } x \in I, \\ f'(x) = (v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x), \end{aligned}$$

Autrement dit, $f' = (v' \circ u) \times u'$.

Exemple :

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{x^2+1}$. Vidéo

3. Fonctions \sqrt{u} , u^n et e^u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n désigne un entier relatif non nul.

Fonctions composées	Dérivées
u^2	$2uu'$
u^n ($n \in \mathbb{Z}^*$) et $u \neq 0$ si $n < 0$	$nu^{n-1}u'$
\sqrt{u} ($u > 0$)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$

Exemple :

Déterminer la dérivée des fonctions définies par : $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$ et $g(x) = (2x^2 + 3x)^4$. Vidéo

4. Dérivée seconde

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée. La fonction f est deux fois dérivable sur I si f' est elle-même dérivable sur I .
On note f'' la dérivée de f' . Elle est appelée dérivée seconde de f .

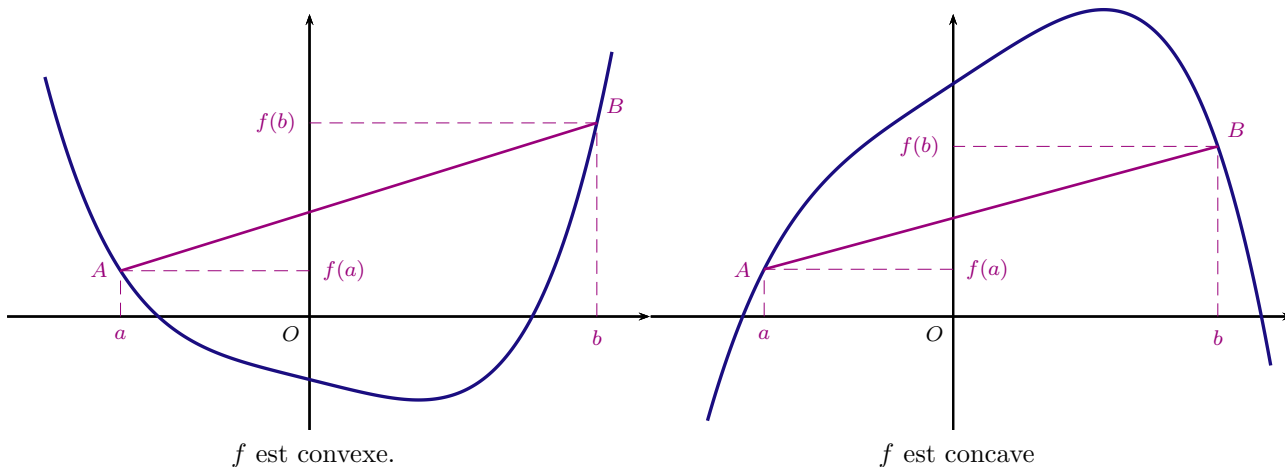
II. Convexité d'une fonction

1. Approche graphique

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et \mathcal{C} sa courbe.

- f est **convexe** sur I si, pour tous réels a et b de I , la portion de la courbe \mathcal{C} située entre les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ est **en-dessous** de la sécante (AB) .
- f est **concave** sur I si, pour tous réels a et b de I , la portion de la courbe \mathcal{C} située entre les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ est **au-dessus** de la sécante (AB) .



Exemples :

La fonction carré et la fonction exponentielle sont convexes sur \mathbb{R} .

La fonction racine carrée est concave sur $]0; +\infty[$.

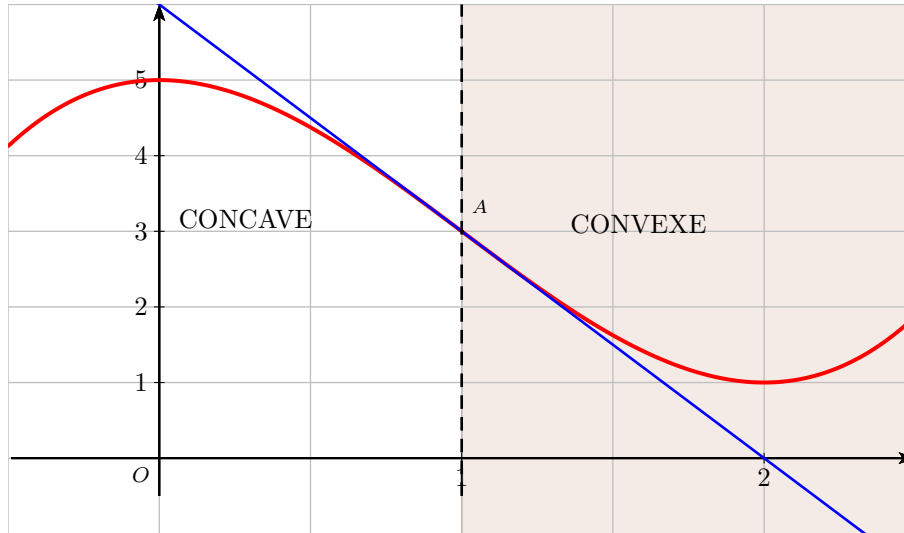
La fonction inverse est concave sur $] - \infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$.

La fonction cube est concave sur $] - \infty; 0]$ et convexe sur $]0; +\infty[$.

2. Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et A un point de sa courbe \mathcal{C} .
 A est un point d'inflexion de \mathcal{C} si \mathcal{C} admet une tangente en A et si \mathcal{C} traverse cette tangente en A .



3. Convexité et dérivées

Propriétés

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

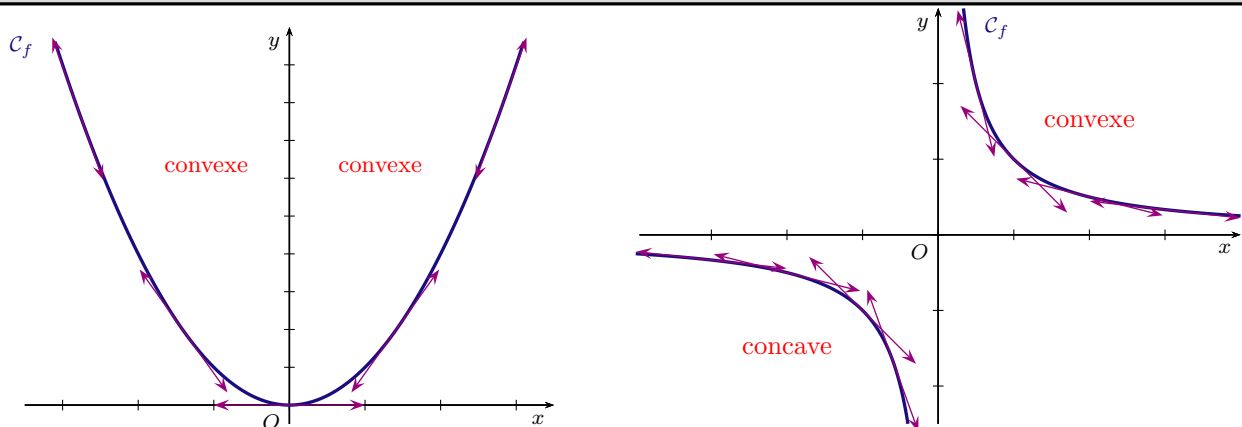
- f est convexe sur I .
- f'' est positive sur I .
- f' est croissante sur I .
- f est concave sur I .
- f'' est négative sur I .
- f' est décroissante sur I .

4. Convexité et tangentes

Propriétés

Soit I un intervalle sur lequel f est dérivable.

- f est convexe sur I si et seulement si \mathcal{C} est au-dessus de toutes ses tangentes.
- f est concave sur I si et seulement si \mathcal{C} est en-dessous de toutes ses tangentes.



Remarque : Une fonction croissante et convexe sur un intervalle I est une fonction qui croît "de plus en plus vite" sur I . Les pentes des tangentes à sa courbe augmentent quand les abscisses augmentent. Pour une fonction croissante et concave, c'est le contraire : elle croît "de moins en moins vite".

5. Point d'inflexion

Propriétés

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , \mathcal{C} sa courbe et a un réel de I .

- Si f' change de sens de variation en a , alors \mathcal{C} admet un point d'inflexion au point d'abscisse a .
- Si f'' s'annule et change de signe en a , alors \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a .

Exemple :

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.

Le coût de fabrication (en milliers d'euros) de x milliers de clés USB est :

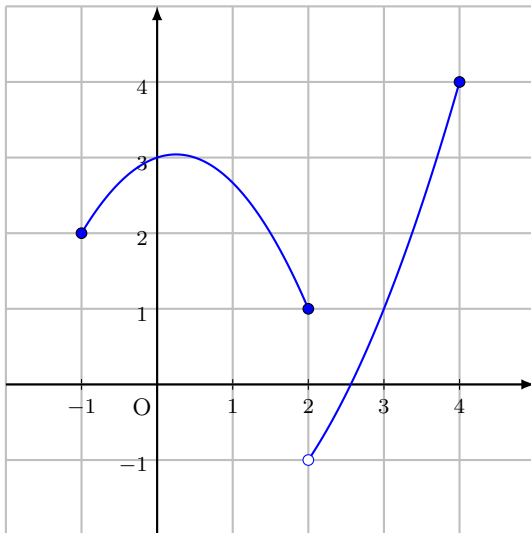
$$C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$$

Etudier la convexité de C . Interpréter. [Vidéo](#)

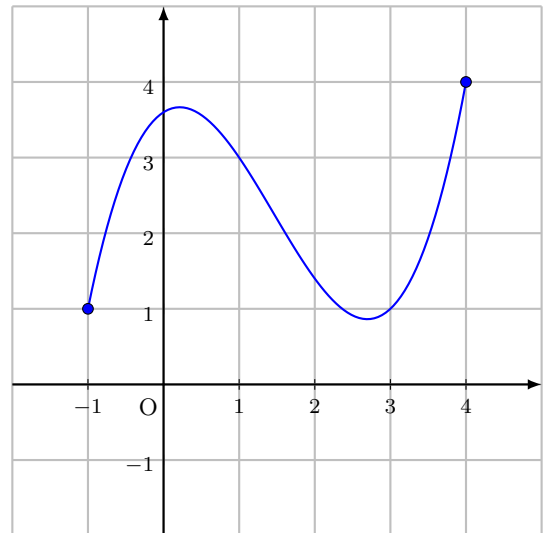
III. Fonctions continues

Définition

La fonction f est **continue** sur l'intervalle I si elle est définie sur I et si sa courbe représentative se trace d'un « trait continu » sans lever le crayon sur cet intervalle.



f n'est pas continue sur $[-1; 4]$



f est continue sur $[-1; 4]$

Remarque :

f est continue en un réel a lorsque f est définie en a et admet une limite en a égale à $f(a)$.

Autrement dit, f est continue en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Sinon, on dit que f est discontinue en a .

Propriété : continuité et dérivabilité

Toute fonction dérivable en a est continue en a . (la réciproque est fautive)

Propriété : continuité et suites convergentes

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , a un réel appartenant à I et (u_n) une suite à valeurs dans I . Si (u_n) converge vers a , alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Propriété : continuité des fonctions usuelles

- Les fonctions polynômes et la fonction racine carrée sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues sur les intervalles formant leur ensemble de définition.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{pour } x < 3 \\ x - 4 & \text{pour } 3 \leq x < 5 \\ -2x + 13 & \text{pour } x \geq 5 \end{cases}$.

La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ? Vidéo

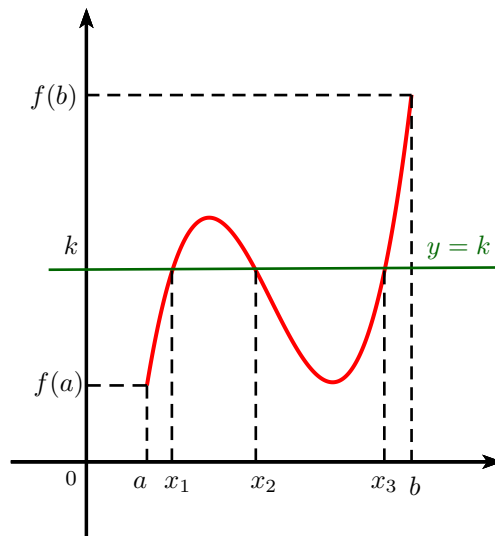
IV. Théorème des valeurs intermédiaires

1. Cas d'un intervalle fermé

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a ; b]$.



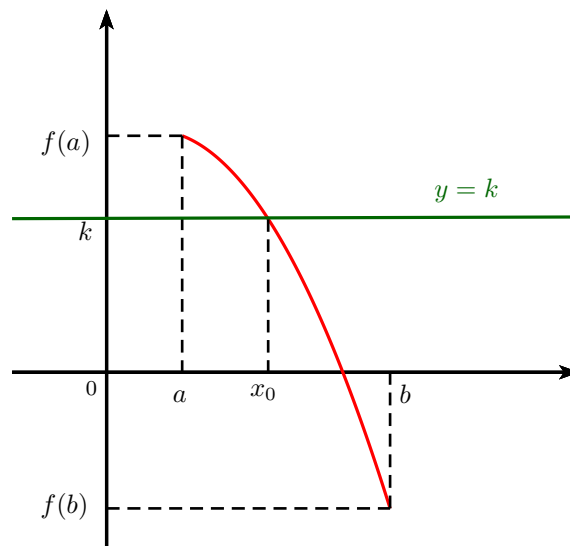
L'équation $f(x) = k$ admet trois solutions : x_1 , x_2 et x_3 .

2. Cas d'un intervalle fermé

Corollaire du TVI

Soit f une fonction continue et **strictement monotone** sur un intervalle $[a ; b]$.

Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a ; b]$.



L'équation $f(x) = k$ admet une unique solution : x_0 .

3. Extension à d'autres intervalles

Théorème

Soit a un réel ou $-\infty$, b un réel ou $+\infty$ et f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $]a; b[$ et dont les limites en a et b existent.

Alors pour tout réel k compris entre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $]a; b[$.

Exemple :

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	1	k	$-\infty$

Pour tout réel $k \in]-\infty; 1[$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.

Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1; 4]$.

[Vidéo](#)

Exemple :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Démontrer que $f'(x) = 3x(x - 2)$ et en déduire les variations de f sur $]2; 3[$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]2; 3[$.
3. Donner un encadrement de α au centième.

[Vidéo](#)