Fonction logarithme

www.mathGM.fr

Lycée Louise Michel (Gisors)

Les savoir-faire

90. Connaître le sens de variation, le signe, les limites, et la courbe représentative de la fonction $\ln$.
91. Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.
92. Calculer des limites de fonctions logarithmes.
93. Résoudre des équations ou des inéquations contenant des logarithmes.
94. Dériver des fonctions contenant des logarithmes.

L'intro de Nabolos

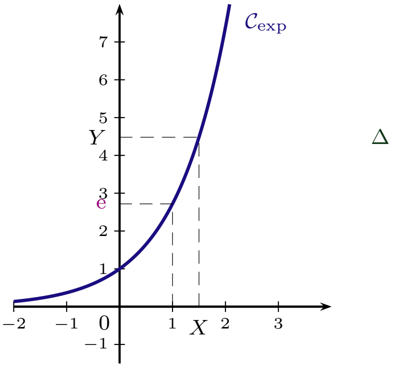
On considère la fonction exponentielle.

1. Justifier par un théorème du cours que, pour pour tout $Y > 0$, il existe un unique réel X tel que $Y = e^X$.

2. Expliquer pourquoi on peut définir une nouvelle fonction qui à Y associe le réel X.Soit ℓ cette fonction.

3. Quel est l'ensemble de définition de ℓ ? Quelle est la valeur de $\ell(1)$? de $\ell(\mathrm{e})$?

4. Donner son tableau de signe, son tableau de variations et tracer sa représentation graphique sur le graphique ci-dessous.

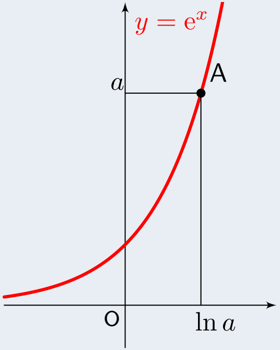


Définition

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet une unique solution notée $\ln(a)$.
On peut définir une nouvelle fonction qui à tout réel strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.

Définition

La fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à tout réel $x > 0$, associe le nombre $\ln x$ est appelée la fonction logarithme népérien et est notée $\ln a$.



Conséquences

Conséquences

Conséquences

Conséquences

- $e^0 = 1 \Longleftrightarrow \ln(1) =$

Conséquences

Conséquences

- $e^0 = 1 \iff \ln(1) = 0\,;$

Conséquences

Conséquences

- $e^0 = 1 \iff \ln(1) = 0\,;$
- $e^1 = e \iff \ln(e) =$

Conséquences

Conséquences

- $e^0 = 1 \iff \ln(1) = 0$;
- $e^1 = e \iff \ln(e) = 1$;

Propriétés

Conséquences

Conséquences

- $\mathrm{e}^0 = 1 \iff \ln(1) = 0\,;$
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \iff \ln(\mathrm{e}) = 1\,;$
- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ a pour unique solution

Propriétés

Conséquences

Conséquences

- $\mathrm{e}^0 = 1 \iff \ln(1) = 0$;
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \iff \ln(\mathrm{e}) = 1$;
- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ a pour unique solution $x = \ln(a)$.

Propriétés

Conséquences

Conséquences

- $e^0 = 1 \iff \ln(1) = 0$;
- $e^1 = e \iff \ln(e) = 1$;
- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ a pour unique solution $x = \ln(a)$.

Propriétés

- Pour tout réel $x > 0$: $e^{\ln(x)} =$

Conséquences

Conséquences

- $\mathrm{e}^0 = 1 \iff \ln(1) = 0$;
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \iff \ln(\mathrm{e}) = 1$;
- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ a pour unique solution $x = \ln(a)$.

Propriétés

- Pour tout réel $x > 0$: $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.

Conséquences

Conséquences

- $\mathrm{e}^0 = 1 \iff \ln(1) = 0$;
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \iff \ln(\mathrm{e}) = 1$;
- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ a pour unique solution $x = \ln(a)$.

Propriétés

- Pour tout réel $x > 0$: $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) =$

Conséquences

Conséquences

- $\mathrm{e}^0 = 1 \iff \ln(1) = 0$;
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \iff \ln(\mathrm{e}) = 1$;
- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ a pour unique solution $x = \ln(a)$.

Propriétés

- Pour tout réel $x > 0$: $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$.

Conséquences

Conséquences

- $\mathrm{e}^0 = 1 \iff \ln(1) = 0$;
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \iff \ln(\mathrm{e}) = 1$;
- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ a pour unique solution $x = \ln(a)$.

Propriétés

- Pour tout réel $x > 0$: $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$.
- Pour tous réels $x > 0$ et y : $y = \ln(x) \iff x =$

Conséquences

Conséquences

- $\mathrm{e}^0 = 1 \iff \ln(1) = 0$;
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \iff \ln(\mathrm{e}) = 1$;
- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ a pour unique solution $x = \ln(a)$.

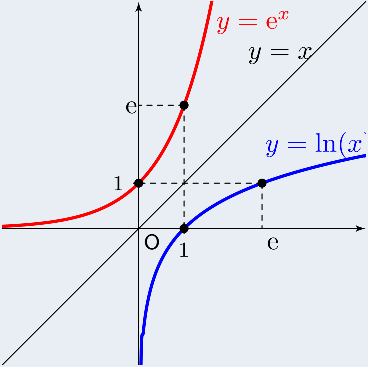
Propriétés

- Pour tout réel $x > 0$: $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$.
- Pour tous réels $x > 0$ et y : $y = \ln(x) \iff x = \mathrm{e}^y$.

Courbe représentative

Propriété

Dans un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction $\ln$ est la symétrique de la courbe représentant la fonction $\exp$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.
On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.



Relations fonctionnelles

Propriété fondamentale

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Relations fonctionnelles

Propriété fondamentale

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Propriétés

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \qquad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) =$$

$$\ln\left(x^n\right) = \qquad ; \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) =$$

Relations fonctionnelles

Propriété fondamentale

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Propriétés

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) =$$

$$\ln\left(x^n\right) = \qquad\qquad ; \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) =$$

Relations fonctionnelles

Propriété fondamentale

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Propriétés

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln\left(x^n\right) = \qquad ; \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) =$$

Relations fonctionnelles

Propriété fondamentale

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Propriétés

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln\left(x^n\right) = n\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) =$$

Relations fonctionnelles

Propriété fondamentale

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Propriétés

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln\left(x^n\right) = n\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

Relations fonctionnelles

Propriété fondamentale

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Propriétés

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln\left(x^n\right) = n\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

Exemples

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$

$B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$; $C = \ln \mathrm{e}^2 - \ln\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ Vidéo

Variations, limites

Dérivée

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur $]0;+\infty[$. Pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}>0$ donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Variations, limites

Dérivée

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur $]0;+\infty[$. Pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}>0$ donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Conséquences

Pour tous réels $a>0$ et $b>0$:

$$\ln(a)=\ln(b) \iff \qquad ; \quad \ln(a)<\ln(b) \iff$$

Variations, limites

Dérivée

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur $]0;+\infty[$. Pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}>0$ donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Conséquences

Pour tous réels $a>0$ et $b>0$:

$$\ln(a)=\ln(b)\iff a=b \quad ; \quad \ln(a)<\ln(b)\iff$$

Variations, limites

Dérivée

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur $]0;+\infty[$. Pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}>0$ donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Conséquences

Pour tous réels $a>0$ et $b>0$:

$$\ln(a)=\ln(b)\iff a=b \quad ; \quad \ln(a)<\ln(b)\iff a<b$$

Variations, limites

Dérivée

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur $]0;+\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Conséquences

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b \quad ; \quad \ln(a) < \ln(b) \iff a < b$$

Limites

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \qquad\qquad ; \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) =$$

Variations, limites

Dérivée

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur $]0;+\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Conséquences

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b \quad ; \quad \ln(a) < \ln(b) \iff a < b$$

Limites

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) =$$

Variations, limites

Dérivée

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur $]0;+\infty[$. Pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}>0$ donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Conséquences

Pour tous réels $a>0$ et $b>0$:

$$\ln(a)=\ln(b)\iff a=b \quad ; \quad \ln(a)<\ln(b)\iff a<b$$

Limites

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$$

Exemples

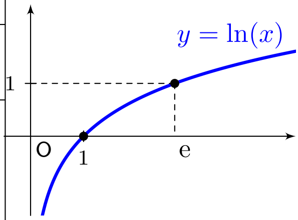
1. Résoudre : **a.** $\ln x=2$. **b.** $\mathrm{e}^{x+1}=5$. Vidéo

c. $\ln(x-3)+\ln(9-x)=0$. Vidéo

2. Résoudre : **a.** $\ln(6x-1)\geqslant 2$. **b.** $\mathrm{e}^{x}+5>4\mathrm{e}^{x}$. Vidéo

Bilan

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|\|$		$+$		
$\ln$	$\|\|$	$-\infty$	0		$+\infty$



x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Dérivée

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = x^3 \ln x \qquad g(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$ Vidéo

Fonction $\ln u$

Dérivée

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I.
La fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et admet pour dérivée :

$$(\ln(u))' =$$

Fonction $\ln u$

Dérivée

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I.
La fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et admet pour dérivée :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

Exemples

Dériver les fonctions suivantes :
$f(x) = \ln(2x - x^2)$ $\qquad g(x) = x\ln(x^2 + 1)$ Vidéo

Autres limites

Croissances comparées

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \qquad ; \qquad \lim_{x \to 0^+} x\ln(x) =$$

Autres limites

Croissances comparées

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+ \qquad ; \qquad \lim_{x \to 0^+} x\ln(x) =$$

Exemples

Calculer :

$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ Vidéo

$\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x)$ Vidéo

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$ Vidéo

Autres limites

Croissances comparées

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+ \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$$

Exemples

Calculer :

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ Vidéo

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x)$ Vidéo

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ Vidéo